

APERÇU DES ORIGINES DE LA GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

Patrick Iglesias-Zemmour*

Jérusalem, le 18 Décembre 2002

Introduction

Cet article est une brève introduction à l'histoire des origines de la géométrie symplectique. Comme pour tout fruit de la pensée humaine, la géométrie symplectique mérite que l'on connaisse la branche et même l'arbre qui le porte. Séparer le fruit de l'arbre, comme il est malheureusement courant de le faire dans l'enseignement, aboutit à le flétrir.

La géométrie symplectique s'est imposée comme discipline mathématique à part entière vers le milieu du vingtième siècle, avec l'apparition de la quantification géométrique, comme préalable à l'élaboration des bases mathématiques des principes de la mécanique quantique. Les objets modernes de cette théorie, comme le groupe symplectique linéaire, les variétés symplectiques, les objets symplectiques fondamentaux : sous-espaces isotropes, lagrangiens, application moment, structure symplectique des orbites coadjointes etc... sont apparus comme les réponses mathématiques aux constructions nécessaires de la physique du vingtième siècle. Une fois ces objets introduits, l'étude de leurs relations mutuelles a constitué ce que l'on appelle aujourd'hui la

*Je remercie chaleureusement l'Université Hébraïque de Jérusalem, qui m'a hébergé ces derniers mois, pour l'ambiance amicale et studieuse que j'y ai trouvée ; je remercie mes collègues israéliens, en particulier Yaël Karshon et Gil Kalaï, pour m'y avoir invité et permis de profiter de ce cadre agréable, unique et magique.

géométrie symplectique. En même temps, l'élaboration de cette théorie pour les fins de la physique quantique, a permis de jeter un regard nouveau sur la mécanique classique et ses principes, de la dynamique des systèmes de points à l'optique. La géométrie symplectique est devenue le cadre par excellence de la mécanique à tel point que l'on peut dire aujourd'hui que ces théories se confondent (voir par exemple, deux approches différentes [Sou1969] et [Arn1976, Arn1980]). La géométrie symplectique n'est pas seulement le langage de la mécanique, elle en est l'essence et la matière.

Pour apprécier le récit des origines d'une théorie il faut en avoir une idée, ne serait ce qu'élémentaire. La première partie de cet article est consacrée à une présentation sommaire de la géométrie symplectique et de quelques uns de ses objets. Une des difficultés majeures de cette géométrie est qu'elle est peu visuelle, comme peut l'être par exemple la géométrie euclidienne, car elle évolue en général en grande dimension. En effet, ses objets ne sont pas du domaine du visible immédiat mais concernent la structure interne, cachée, des choses comme la gravitation, les mécanismes, l'optique, les particules élémentaires et autres. Alors, pour en avoir quand même une idée je propose un parallèle qui présente, en quelque sorte, la géométrie symplectique en négatif de la géométrie euclidienne.

La deuxième partie de cet article est consacrée à la discussion sur les origines proprement dites de la géométrie symplectique, dans les travaux de Lagrange sur les questions de stabilité du système des planètes. C'est entre 1808 et 1811, que Joseph-Louis Lagrange, professeur à l'école Polytechnique, introduit les premiers éléments de calcul symplectique, dans trois articles [Lag1808] [Lag1809] [Lag1810], publiés aux comptes rendus de l'Académie, et enfin dans le deuxième tome de sa *Mécanique Analytique* [Lag1811], où son travail à ce sujet prend sa forme aboutie. Cette partie de sa *Mécanique* n'a été publiée qu'après sa mort, en 1816.

La troisième partie de cet article est consacrée à une discussion sur une méprise historique amusante ou consternante : l'utilisation de la lettre **H** dans les cours de mécanique moderne désigne ce que l'on a coutume d'appeler le *hamiltonien*, qui représente l'énergie totale d'un système mécanique, faisant référence par là à Sir William R. Hamilton, célèbre mathématicien irlandais du dix-neuvième siècle. Mais, en réalité, Lagrange utilise déjà dans sa *Mécanique* la lettre **H** pour désigner la *constante des forces vives*, c'est-

à-dire justement l'*énergie totale* du système, et cette lettre n'est pas choisie au hasard mais en hommage à Christian Huygens à qui Lagrange attribue le mérite de cette découverte. Sir Hamilton, à cette époque, n'avait pas encore commencé sa carrière scientifique, il n'était âgé que de cinq ans.

La quatrième partie de cet article est une discussion sur les mérites respectifs de Lagrange et de Poisson quant à l'introduction et l'usage des divers crochets et parenthèses qui apparaissent à la lecture de leurs œuvres, et qui expriment d'une manière ou d'une autre la nature symplectique de l'espace des solutions des systèmes de la mécanique analytique.

1 Éléments de géométrie symplectique

Les mathématiciens modernes accordent au mot *géométrie* un sens différent que celui que lui donnait les anciens. Après Felix Klein et son *Programme d'Erlangen*, on désigne aujourd'hui, par ce terme, l'étude des actions de groupes sur des ensembles. Les ensembles en question sont censés représenter des objets idéalisés comme les *points*, les *cercles*, les *droites*, ou autres objets que la notion de groupe fait apparaître, comme les *moments* par exemple, et qui n'ont pas nécessairement de visualisation immédiate naturelle. Rappelons qu'un *groupe* est un ensemble G muni d'une loi $*$ de composition possédant les vertus (axiomes) suivantes :

1. A deux éléments du groupe, a et b on sait associer un troisième noté $a * b$, c'est la *loi* du groupe.
2. Cette loi est *associative*, c'est-à-dire : le résultat des opérations $(a * b) * c$ et $a * (b * c)$ est identique.
3. Il existe un *élément neutre* e dont l'opération sur tout autre élément a laisse l'élément inchangé : $e * a = a * e = a$.
4. Tout élément a possède un *inverse* $\bar{a}$ dont l'opération sur a renvoie l'élément neutre : $a * \bar{a} = \bar{a} * a = e$.

Les premiers exemples de groupes sont les *groupes de transformations*. Par exemple, le *groupe d'Euclide*, ou *groupe des déplacements euclidiens*. Pour

le plan euclidien P , ce groupe est engendré par les *translations* et les *rotations* autour d'un centre. Tout objet ou figure géométrique du plan peut être *translaté* le long d'un vecteur fixe, et tournée d'un angle donné, autour d'un centre. L'ensemble de ces transformations constitue le groupe d'Euclide. Ce groupe est formellement défini comme l'ensemble des *transformations affines* du plan préservant la *distance euclidienne*, définie par le *théorème* de Pythagore. Supposons donc connue la notion de plan euclidien, de point et de groupe des déplacements euclidiens. Nous pouvons retrouver les objets géométriques euclidiens plus élaborés, par un jeu sur les *symétries* des figures¹.

La *symétrie* d'une figure du plan euclidien, c'est-à-dire d'un ensemble de points, est définie comme l'ensemble des transformations euclidiennes du plan qui laisse cette figure globalement inchangée. Cet ensemble de transformations euclidiennes constitue un *sous-groupe* du groupe d'Euclide.

- **Les cercles :** la *symétrie* d'un point A du plan est l'ensemble des rotations autour de A . Mais comme sous-groupe de transformations du plan cette symétrie a des *orbites*, c'est-à-dire les ensembles de points qui se déduisent les uns des autres par l'action de ce groupe. Les orbites de la symétrie d'un point sont les cercles concentriques à ce point. Autrement dit, le statut géométrique d'un *cercle* est d'être une orbite de la symétrie d'un point.
- **La distance :** deux points A et B définissent la distance de l'un à l'autre comme l'orbite du couple (A, B) sur lequel le groupe d'Euclide agit de la même façon sur chacun des facteurs. Autrement dit, deux points sont à la même distance que deux autres s'ils peuvent se superposer par l'action d'un déplacement. La distance n'est plus un nombre mais une orbite du groupe d'Euclide agissant sur les couples de points.
- **Les droites :** la symétrie d'un couple de points distincts (A, B) agissant sur les points du plan sépare ceux-là en deux classes : ceux fixés par la symétrie et les autres. Les points fixés par la symétrie constituent la droite Δ passant par les points A et B . Les droites se retrouvent

¹Ce passage est inspiré de différentes discussions avec Jean-Marie Souriau, à propos d'une axiomatique du groupe d'Euclide, qui évite la définition préalable de la distance euclidienne.

donc redéfinies, par ce jeu, comme l'ensemble des point invariants sous l'action de la symétrie d'un couple de points distincts ; cette symétrie est le groupe de réflexion par rapport à Δ .

- **Les parallèles** : la symétrie d'un droite Δ est engendrée par les translations le long de cette droite et la réflexion par rapport à Δ . Ses orbites, dans le plan, sont les droites parallèles à Δ ; mais, à cause de la réflexion, elles viennent par deux.
- **Les triangles** : les triangles équivalents de la géométrie euclidienne sont les orbites des triplets de points (A, B, C) que l'on souhaite non concourants. Les différentes symétries des triangles les partagent en classes : triangles *quelconques*, triangles *isocèles*, triangles *équilatéraux*. Deux triangles sont équivalents si les distances respectives entre leurs sommets sont identiques, c'est le cas d'égalité des triangles.

Ainsi, grâce à ce petit jeu des symétries et des orbites, on peut retrouver l'ensemble des objets traditionnels de la géométrie euclidienne sans faire appel à autre chose que le groupe des transformations euclidiennes et ses sous-groupes. Venons en maintenant à la géométrie symplectique et au groupe qui lui est associé. De la même manière que le groupe d'Euclide est défini par le groupe des transformations affines qui préservent la distance de Pythagore, le *groupe symplectique* du plan est défini comme le groupe des transformations affines qui préservent la *surface signée* des triplets de points *ou des couples de vecteurs*.

L'aire signée : trois points (A, B, C) du plan définissent un couple de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Considérons un système de coordonnées orthonormées du plan d'origine A , les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont repérés par des couples de nombres, respectivement, (x, y) et (x', y') (voir figure 1). La surface signée de ce couple est définie par :

$$S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = xy' - x'y. \quad (1)$$

C'est la surface du parallélogramme dont les côtés sont portés par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, elle est dite *signée* parce qu'elle s'inverse lorsqu'on permute les point B et C : $S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -S(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$. Pour se convaincre que

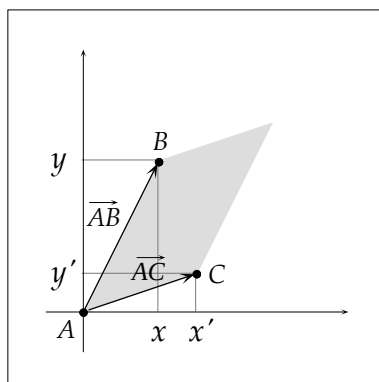


Figure 1: L'aire signée $xy' - yx'$

cette formule donne bien l'aire du parallélogramme en question il suffit de se rappeler que l'aire d'un parallélogramme est égal à sa base par sa hauteur. Ensuite, en faisant glisser le parallélogramme le long des directrices pour le transformer en un rectangle appuyés sur les axes, on obtient facilement l'expression annoncée.

Cette opération qui à chaque couple de vecteurs du plan, issus d'une même origine, renvoie l'aire du parallélogramme associé est appelée *forme symplectique* du plan. Le groupe des transformations linéaires qui préservent cette forme symplectique est appelé *groupe symplectique*. De la même manière que le groupe des transformations euclidiennes est engendré par les rotations et les translations, le *groupe symplectique affine* est engendré par les transformations symplectiques linéaires et les translations, les transformations symplectiques linéaires prennent le rôle des rotations.

Note – C'est Hermann Weyl qui, dans son livre *Les Groupes classiques* [Wey1946], choisit ce nom : groupe symplectique. La relation étroite entre cette structure définie par l'aire signée et la structure des *nombres complexes* lui fait choisir le mot *symplectique* [grec sum-plektikos], transposition de *complexe* [latin com-plexus], pour désigner ce groupe. Le suffixe *plekticos* $\sim$ *plexus* signifiant *tenir, entrelacer...* L'idée de *complexe*, comme *symplectique* sous-entend l'existence de plusieurs types d'objets (ici deux) maintenus ensemble dans une même structure. On peut dire, rapidement, que dans un cas la *complexité* représente la dualité *réel-imaginaire*, et dans l'autre la *sym-*

plecticité représente la dualité *position-vitesse*. Voilà ce qu'en dit lui même Weyl [Wey1946, p. 165] :

The name “complex group” formerly advocated by me in allusion to line complexes, as these are defined by the vanishing of antisymmetric bilinear forms, has become more and more embarrassing through collision with the word “complex” in the connotation of complex number. I therefore propose to replace it by the corresponding Greek adjective “symplectic”. Dickson calls the group the “Abelian linear group” in homage to Abel who first studied it.

Que reste-t-il du jeu des symétries, lorsqu'on remplace le groupe d'Euclide par le groupe des transformations symplectiques affines ?

- **Disparition des cercles** : la *symétrie* d'un point A du plan est l'ensemble des transformations symplectiques d'origine A . Malheureusement ce groupe a deux orbites, le point A , fixé, et tout le reste du plan. En effet, pour tout couple de points différents de A on peut trouver une transformation symplectique qui fixe A et qui amène l'un sur l'autre.
- **Disparition de la distance** : Puisque tout couple de points non confondus est équivalent à tout autre couple de points non confondus, il n'existe plus de « distance » au sens des orbites des couples de points, par le groupe symplectique affine.
- **Les droites** : la symétrie d'un couple de points distincts (A, B) agissant sur les points du plan sépare ceux-là encore en deux classes : ceux fixés par la symétrie et les autres. Les points fixés par la symétrie constituent la droite Δ passant par les points A et B . Les droites « symplectiques » survivent donc à ce petit jeu de la symétrie.
- **Disparition des parallèles** : malheureusement la symétrie d'une droite n'a que deux orbites, elle même et le reste du plan. Il n'existe donc pas de notion de parallélisme en géométrie symplectique, analogue à celle de la géométrie euclidienne.

- **Les triangles :** les triangles équivalents de la géométrie symplectique sont les orbites des triplets de points (A, B, C) que l'on souhaite non concourants. Naturellement, deux triangles sont équivalents si leur aire est identique. Il existe donc beaucoup moins de triangles « différents » en géométrie symplectique qu'en géométrie euclidienne. L'égalité des triangles est réduite à l'égalité des aires.

Voilà donc une illustration sommaire, à travers le prisme de la géométrie euclidienne, de quelques aspects de la géométrie symplectique. Ce jeu des symétries et des orbites est certainement le jeu favori des mathématiciens lorsqu'il s'agit de géométrie. Mais les mathématiciens ne se satisfont pas du plan, ils généralisent la structure symplectique, introduite plus haut, en dimension supérieure. Considérons n copies du plan P , soit $P^n = P \times \dots \times P$, n fois, c'est un espace affine de dimension $2n$. Choisissons, dans chaque copie du plan P trois points (O_i, B_i, C_i) , i variant de 1 à n . Nous avons ainsi n triangles, pour chacun d'entre eux nous choisissons un sommet : O_i . Nous avons ainsi n paires de vecteurs du plan $(\overrightarrow{O_i B_i}, \overrightarrow{O_i C_i})$. La fonction qui associe à ces n couples de vecteurs du plan la somme des surfaces signées de parallélogrammes associés est une *structure symplectique* sur P^n :

$$S_n((\overrightarrow{O_1 B_1}, \overrightarrow{O_1 C_1}), \dots, (\overrightarrow{O_n B_n}, \overrightarrow{O_n C_n})) = \sum_{i=1}^n S(\overrightarrow{O_i B_i}, \overrightarrow{O_i C_i}). \quad (2)$$

À cette structure symplectique, en dimension $2n$, est associé un nouveau groupe symplectique linéaire, plus complexe que dans le cas du plan, qui définit la géométrie symplectique en cette dimension.

Mais cette généralisation est la moindre, les mathématiciens ont affaire non seulement à des espaces linéaires mais aussi à des espaces plus généraux qu'ils appellent des *variétés*. Les variétés (différentielles) ressemblent localement à des espaces linéaires : chaque point peut être considéré comme l'origine d'un morceau d'espace affine, avec un système de coordonnées adapté, mais ce morceau n'est pas l'espace entier et l'ensemble de ces systèmes de coordonnées ne se « recolle » pas comme un système de coordonnées affines. Comme exemple de variétés : les sphères d'un espace euclidien, les tores, l'ensemble des droites d'un espace affine, ou encore l'ensemble des triangles, et d'autres ensembles plus compliqués. La notion de forme symplectique s'étend

aux variétés différentielles, de dimension paire, en supposant l'existence d'une forme symplectique, comme nous l'avons introduite plus haut, définie sur chaque domaine de coordonnées. Les changements de coordonnées, d'un système à un autre, devant respecter cette structure². Comme exemple de variété symplectique : toute sphère ordinaire de dimension 2, c'est-à-dire l'ensemble des points, de l'espace à trois dimensions, à égale distance d'une origine³. Les tores de dimension paire, l'espace des droites affines d'un espace affine quelconque. La liste est loin d'être achevée. L'introduction d'une structure symplectique sur une variété fait apparaître un groupe de transformations bien plus grand que les transformations symplectiques affines : le groupe des *symplectomorphismes* c'est-à-dire le groupe des transformations différentielles qui préservent *infinitésimalement* la structure symplectique⁴. L'étude de ce groupe, de ses sous-groupes, est une des préoccupations essentielles de la géométrie symplectique différentielle.

2 Lagrange et le calcul symplectique

La première structure symplectique de l'histoire des mathématiques est apparue dans les travaux de Lagrange sur la théorie des perturbations des planètes du système solaire [Lag1808, Lag1809, Lag1810, Lag1811]. Si le problème à deux corps est résolu de façon entièrement satisfaisante, de façon pratique et théorique, grâce en particulier aux travaux de Kepler et de Newton, il n'en va pas de même en ce qui concerne le *problème à n -corps*, c'est-à-dire l'étude des mouvements d'un système quelconque de planètes en interactions mutuelles. La seule méthode d'étude, encore aujourd'hui, reste la méthode des perturbations. C'est cette méthode que Laplace a utilisée pour démontrer, dans certaines conditions d'approximation, la stabilité du grand axe des planètes. En août 1808, Lagrange expose à l'Académie un mémoire de Siméon-Denis Poisson [Pois1808] qui perfectionne le résultat de Laplace. La complexité des calculs qui constituent ce travail incite Lagrange à reprendre

²La différentielle du changement de coordonnées est en chaque point un élément du groupe symplectique.

³La sphère de dimension 2 est la seule sphère de dimension paire à posséder une structure symplectique.

⁴C'est un groupe de dimension infinie.

cette question à la lumière d'une théorie qu'il avait introduite quelques années auparavant, pour traiter de questions a priori différentes : les solutions particulières d'équations différentielles [Lag1775] [Lag1779]. Cette méthode qu'il a nommée la *méthode de la variation des constantes*, a fait apparaître, sous sa plume, les premiers éléments de calcul symplectique.

L'idée essentielle de la méthode de la variation des constantes consiste à représenter le mouvement du système réel, qui tient compte des interactions que nous ne savons pas résoudre explicitement, dans l'espace des solutions du système où ces interactions sont ignorées. Dans la situation des planètes du système solaire, attirées par un centre fixe, nous savons résoudre le problème de chacune des planètes attirées par le soleil, le *problème à deux corps*, mais nous ne savons pas le résoudre lorsque nous considérons en même temps les interactions mutuelles des planètes entre elles.

Le problème à deux corps

Considérons d'abord une planète attirée par un centre fixe : le soleil, selon la loi de la gravitation universelle. Son mouvement est décrit par une équation différentielle de degré deux dans l'espace à trois dimensions, il faut donc six *constantes d'intégration*⁵ pour le caractériser. D'après Newton, on sait que la trajectoire de ce corps est une ellipse⁶, dont le foyer est le centre d'attraction⁷. Pour décrire complètement cette ellipse il faut d'abord connaître le plan dans lequel elle s'inscrit : le plan de l'orbite, pour le repérer il faut deux paramètres. Pour définir l'ellipse dans son plan on peut choisir la position du deuxième foyer, ce qui donne deux nouveaux paramètres, et le périmètre de l'ellipse⁸, soit au total : cinq paramètres pour situer et décrire la trajectoire

⁵À cette époque on disait *constantes d'intégration* quand nous parlons aujourd'hui d'*espace de solutions*. Par exemple, l'équation différentielle ordinaire réelle $dx/dt = x$ a toutes ses solutions de la forme $x(t) = c \exp(t)$, où c est une constante arbitraire — la fameuse constante d'intégration. Or c caractérise justement cette solution.

⁶Nous ne parlons pas des comètes pour lesquelles les trajectoires peuvent être paraboliques ou hyperboliques.

⁷Si Kepler a découvert le mouvement elliptique des planètes, c'est Newton qui l'a « déduit » de la loi de la gravitation universelle qui porte son nom. Pour une discussion plus approfondie sur ce sujet voir la thèse de F. de Gandt [dG1987].

⁸Il est possible maintenant de tracer l'ellipse par la méthode du jardinier.

du corps dans l'espace.

Mais si ces cinq paramètres suffisent à définir complètement la trajectoire du corps céleste, ils ne suffisent pas à déterminer son *mouvement*. En effet, comment déterminer la position de la planète à chaque instant sur sa trajectoire si on ne connaît pas sa position à une origine des temps arbitraire ? ou encore la date de son passage à l'aphélie ? Voilà comment s'introduit ce sixième paramètre que les astronomes appellent l'*époque*.

Dans sa *Mécanique*, Lagrange choisit les six *éléments képlériens* (a, b, c, h, i, k) , où a est la valeur du demi-grand axe (l'inverse de la constante des forces vives au signe près), b le paramètre de l'ellipse (qui est le carré du moment cinétique), c l'époque. Les éléments h, i et k déterminent le plan de l'orbite et l'axe de l'ellipse dans ce plan : i est l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à un plan de référence, h est la *longitude des nœuds*, c'est-à-dire l'angle que fait la trace du plan de l'orbite sur le plan de référence (la *ligne des nœuds*), et k est la *longitude du périhélie*, c'est-à-dire l'angle que fait l'axe de l'ellipse avec la ligne des nœuds.

On pourrait tout aussi bien choisir six autres paramètres : par exemple les position et vitesse initiales de la planète à l'origine des temps. Ils définissent aussi, de façon unique, le mouvement de la planète. Seul le caractère pratique de tel ou tel ensemble de paramètres peut justifier un choix ou l'autre. Les astronomes appellent ces paramètres, qui servent à caractériser le mouvement : les *éléments képlériens* de la planète. L'ensemble des mouvements de la planète considérés indépendamment du choix des paramètres qui servent à les décrire est appelé *espace des mouvements képlériens* et noté $\mathcal{K}$, pour les modernes c'est une variété.

La méthode de la variation des constantes

Voici les principes de la méthode de la variation des constantes telle qu'elle a été introduite par Lagrange : lorsque la planète suit un mouvement képlérien, son état est complètement caractérisé par les 6 éléments de son orbite qui définissent, nous l'avons dit, à la fois la figure de l'ellipse et sa loi horaire. Ce mouvement est un point m de l'espace $\mathcal{K}$. Supposons alors que la planète, qui suit le mouvement képlérien m , subisse un choc instantané dû à l'impact d'un astéroïde. Après le choc, elle suivra un nouveau mouvement képlérien m'

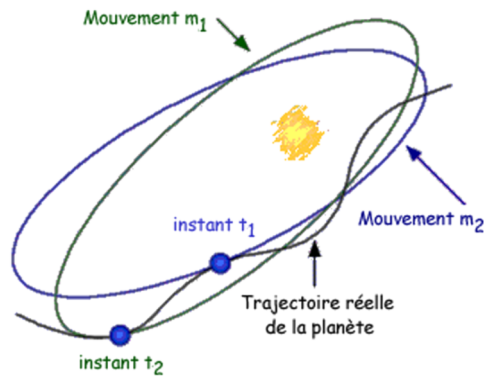


Figure 2: Méthode de la variation des constantes

différent du précédent. C'est une autre ellipse⁹ parcourue selon une nouvelle loi horaire. Le mouvement, perturbé, de cette planète est donc décrit par son mouvement m avant le choc, son mouvement m' après le choc et l'instant t du choc. Supposons ensuite que la planète subisse une série de chocs de ce type. Le mouvement réel de la planète est donc décrit par une courbe dans l'espace des mouvements képlériens, discontinue et constante par morceaux, chaque morceau de courbe décrivant le mouvement képlérien de la planète entre deux chocs successifs. Suivant ce raisonnement, Lagrange interprète l'interaction des autres planètes du système solaire comme une série infinie de chocs « infiniment petits et continuels ». Il décrit ainsi le mouvement réel de la planète perturbée par une courbe, maintenant différentiable, tracée dans l'espace des mouvements képlériens. C'est ce que représente, de façon rudimentaire, la figure 2. Voici ce qu'en dit Lagrange exactement [Lag1811, tome II, p.58] :

« Un des premiers et des plus beaux résultats de la Théorie de Newton, sur le système du monde, consiste en ce que toutes les orbites des corps célestes sont de même nature, et ne diffèrent entre elles qu'à raison de la force de projection que ces corps peuvent être supposés avoir reçue dans l'origine des choses. Il suit de là que, si une planète ou une comète venait à recevoir une impulsion étrangère quelconque, son orbite en serait dérangée ; mais il

⁹Si le choc n'a pas été trop violent !

n'y aurait que les éléments, qui sont les constantes arbitraires de l'équation, qui pourraient changer : c'est ainsi que l'orbite circulaire ou elliptique d'une planète pourrait devenir parabolique ou même hyperbolique, ce qui transformerait la planète en comète.

Il en est de même de tous les problèmes de Mécanique. Comme les constantes arbitraires introduites par les intégrations dépendent de l'état initial du système, qui peut être placé dans un instant quelconque, si l'on suppose que les corps viennent à recevoir pendant leur mouvement des impulsions quelconques, les vitesses produites par ces impulsions étant composées avec les vitesses déjà acquises par les corps, pourront être regardées comme des vitesses initiales, et ne feront que changer les valeurs des constantes.

Et si au lieu d'impulsions finies, qui n'agissent que dans un instant, on suppose les impulsions infiniment petites, mais dont l'action soit continuelle, les mêmes constantes deviendront tout à fait variables, et serviront à déterminer l'effet de ces sortes de forces, qu'il faudra regarder comme des forces perturbatrices. »

Les crochets et parenthèses de Lagrange

Le mouvement d'une planète attirée par un centre fixe et perturbé par l'interaction d'autres planètes se traduit donc par une courbe sur l'espace des éléments képlériens. C'est cette courbe qu'il s'agit de déterminer, et d'en extraire éventuellement quelques renseignements, comme la stabilité du grand axe. Reprenons le discours de Lagrange : supposons donc que la planète subisse de façon continue une série de chocs infiniment petits. Ces chocs se traduisent par une variation instantanée de la vitesse, au point d'impact. Si on désigne par a un élément quelconque de la planète (par exemple le demi grand axe), on pourra écrire¹⁰ :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}^i} \frac{d\mathbf{v}^i}{dt}, \quad (3)$$

¹⁰On note $\partial a / \partial \mathbf{r}$ l'application linéaire tangente de $\mathbf{r} \mapsto a$.

où $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3)$ représente la vitesse instantanée de la planète. En remarquant que le vecteur $d\mathbf{v}/dt$ représente exactement la force perturbatrice X exercée sur la planète à l'instant t au point $\mathbf{r} = (\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3)$, la variation infinitésimale de l'élément a , sous l'effet de la perturbation, peut s'exprimer à nouveau :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}} X = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}^i} X^i. \quad (4)$$

Où les X^i sont les composantes de la force perturbatrice. Le mouvement réel est ainsi décrit par la courbe intégrale de cette équation, tracée dans l'espace des éléments de la planète. Cette famille d'ellipses est appelée *famille d'ellipses osculatrices* du mouvement perturbé.

Supposons maintenant que la force perturbatrice X dérive d'un potentiel Ω , autrement dit que :

$$X = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}} \quad \text{i.e.} \quad X^i = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}^i} \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

et que ce *potentiel de perturbation* Ω ne soit fonction que de $\mathbf{r}$. Ce qui, exprimé autrement :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}^i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, . \quad (6)$$

Nous ne changeons donc rien en écrivant :

$$\frac{da}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}^i} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}^i} - \frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}^i} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}^i}. \quad (7)$$

C'est maintenant, avec cette transformation astucieuse de Lagrange¹¹, que l'histoire commence, d'où est sortie la géométrie symplectique. Mais allons un peu plus loin : puisque l'application $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \mapsto (t, a, b, c, h, i, k)$ est un difféomorphisme¹², le potentiel de perturbation peut être considéré aussi bien

¹¹C'est pour simplifier les calculs de ses premiers mémoires que Lagrange utilise cette astuce dans sa *Mécanique*. En effet cette remarque lui évite de longs développements qui justifient l'élimination de termes symétriques dans l'expression de la variation de l'élément képlerien a .

¹²Une correspondance bi-univoque bi-différentiable.

comme une fonction de $\mathbf{r}$ que comme une fonction du temps t et des éléments (a, b, c, h, i, k) de la planète. En remplaçant l'expression des :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}^i} = \frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}^i} + \frac{\partial \Omega}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial \mathbf{r}^i} + \text{etc.}, \quad (8)$$

et des :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}^i} = \frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}^i} + \frac{\partial \Omega}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial \mathbf{v}^i} + \text{etc.}, \quad (9)$$

dans l'équation (7), nous obtenons une nouvelle expression de da/dt :

$$\frac{da}{dt} = (a, b) \frac{\partial \Omega}{\partial b} + (a, c) \frac{\partial \Omega}{\partial c} + \text{etc.} \quad (10)$$

où les parenthèses (a, b) , (a, c) , ..., introduites par Lagrange, sont les fonctions de $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ définies par :

$$(a, b) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}^i} \frac{\partial b}{\partial \mathbf{r}^i} - \frac{\partial b}{\partial \mathbf{v}^i} \frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}^i}. \quad (11)$$

Il en est de même pour les autres parenthèses, au nombre de quatorze puisque on peut déjà constater que $(a, b) = -(b, a)$ etc.. Les termes $\partial \Omega / \partial a$, $\partial \Omega / \partial b$, etc... intervenant dans cette formule, peuvent être considérés, ainsi que les présentent Lagrange, comme les *forces de perturbations* rapportées aux variables (a, b, c, h, i, k) . Les coefficients des forces de perturbation exprimées dans les variables (a, b, c, h, i, k) , sont appelés aujourd'hui *parenthèses de Lagrange*¹³.

L'expression formelle (4) de la variation da/dt est beaucoup plus simple que celle (10) à laquelle nous avons abouti après toutes ces transformations. On peut se demander quel est l'intérêt d'effectuer ces transformations. La réponse est contenu dans le théorème suivant de Lagrange, où l'on considère la transformation $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \mapsto (t, a, b, c, h, i, k)$.

THÉORÈME (LAGRANGE). *Les parenthèses (a, b) , (a, c) , etc. considérées comme des fonctions de (t, a, b, c, h, i, k) ne sont fonction que des éléments (a, b, c, h, i, k) .*

¹³et parfois même appelés *crochets de Poisson*, voir paragraphe 4.

À ce propos Lagrange écrit exactement [Lag1811, volume II page 73] :

« Ainsi la variation de a sera représentée par une formule qui ne contiendra que les différences partielles de Ω par rapport à b , c , etc., multipliées chacune par une fonction de a , b , c , etc., sans t . Et la même chose aura lieu à l'égard des variations des autres constantes arbitraires b , c , h , etc. »

Lagrange fait remarquer aussitôt que la formule (10) donnant l'expression de la variation des éléments de la planète en fonction des forces de perturbations s'inverse, et note :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = [a, b] \frac{db}{dt} + [a, c] \frac{dc}{dt} + \text{etc.}, \quad (12)$$

où les crochets $[a, b]$, $[a, c]$, $\dots$, ne sont eux-mêmes fonctions que des éléments (a, b, c, h, i, k) , et sont explicitement donnés par :

$$[a, b] = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial a} \frac{\partial \mathbf{v}^i}{\partial b} - \frac{\partial \mathbf{v}^i}{\partial a} \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial b}, \quad \text{etc..} \quad (13)$$

Dans cette dernière équation les vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ sont considérés comme fonctions de t et des éléments (a, b, c, h, i, k) .

La structure symplectique de l'espace des mouvements képlériens

Comme le souligne Lagrange dans son théorème, les parenthèses (a, b) , (a, c) , (a, i) ... et les crochets $[a, b]$, $[a, c]$, $[a, i]$..., sont donc fonctions seulement des éléments képlériens a, b, c, h, i, k , ils sont donc bien définis sur l'espace des mouvements képlériens de la planète et pas seulement sur l'espace des conditions initiales $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$, ils définissent, sur cette variété, ce qu'en terme moderne on appelle une *structure*, caractérisée par les trois propriétés remarquables suivantes :

1. Ils sont *anti-symétriques* :

$$[a, b] = -[b, a], \quad [a, c] = -[c, a], \quad \text{etc.}, \quad (14)$$

2. La matrice ω définie par la famille de crochets :

$$\omega_{ab} = [a, b], \quad \omega_{ac} = [a, c], \quad \text{etc.}, \quad (15)$$

est inversible, et son inverse est la matrice des parenthèses de Lagrange :

$$\left(\omega^{-1}\right)_{ab} = (a, b), \quad \left(\omega^{-1}\right)_{ac} = (a, c), \quad \text{etc.} \quad (16)$$

3. Pour tous les triplets d'éléments (a, b, c) , (a, b, h) , $\dots$, (i, h, k) l'équation aux dérivées partielles suivante est vérifiée :

$$\frac{\partial[b, c]}{\partial a} + \frac{\partial[c, a]}{\partial b} + \frac{\partial[a, b]}{\partial c} = 0, \quad \text{etc.} \quad (17)$$

Ces trois propriétés font de la matrice ω une *forme symplectique* sur l'espace $\mathcal{K}$ des éléments képlériens. L'aire signée est donnée par

$$\omega(m)(X, Y) = \sum_{i,j} \omega_{ij}(m) X^i Y^j, \quad (18)$$

où m est un point de l'espace $\mathcal{K}$, $X = (X^1, X^2, X^3)$, $Y = (Y^1, Y^2, Y^3)$ sont deux vecteurs tangent en m à $\mathcal{K}$. La troisième condition, que Lagrange n'évoque pas, est équivalente par le *théorème de Darboux* à l'existence de cartes locales dans lesquelles la forme symplectique est constante, et donnée par une formule du type 2. Ce n'est que plus tard que l'importance de cette condition apparaîtra avec la formalisation du calcul différentiel. Du point de vue de la mécanique cette dernière propriété est la conséquence de l'existence d'un potentiel de la force d'attraction gravitationnelle.

Lagrange a calculé explicitement la valeur de ces crochets, c'est-à-dire les composantes de la forme symplectique, qui sont au nombre de quinze. Il en a donné les expressions dans diverses cartes de l'espace des mouvements képlériens, c'est-à-dire pour divers choix d'éléments képlériens caractérisant les mouvements de la planète. Il n'y a pas grand intérêt à donner ici l'ensemble de ces expressions que l'on peut trouver dans [Lag1808] et [Lag1811].

REMARQUE. Dans sa mécanique, Lagrange note que l'on peut toujours choisir les positions et les vitesses à un instant donné, comme constantes d'intégration, plutôt que les éléments de la planètes. L'expression des parenthèses et

des crochets s'en trouve alors notablement simplifiée. En effet dans ce cas les seuls crochets non nuls sont :

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{r}_i] = 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (19)$$

C'est l'expression de la forme symplectique canonique définie par la formule 2 sur $(\mathbf{R}^2)^n$. Mais Lagrange, même s'il dit qu'« il y aurait toujours de l'avantage à utiliser ces constantes à la place des autres constantes a, b, c , etc. » [Lag1811, volume II, page 76], n'utilisera pratiquement pas ces coordonnées canoniques. Il faut noter, en particulier, que la carte (a, b, c, h, i, k) n'est pas canonique.

Le point de vue moderne de la méthode de Lagrange

Revenons à la méthode de la variation des constantes telle qu'elle est présentée plus haut, et en particulier à la formule 3. Nous pouvons en donner une présentation qui justifie cette méthode du point de vue moderne. Considérons l'espace Y des conditions initiales du système étudié, c'est-à-dire l'espace des triplets $y = (t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ où $t \in \mathbf{R}$, $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3 - \{0\}$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$. Les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + X, \quad (20)$$

sont les courbes intégrales du feuilletage défini sur Y par :

$$y \mapsto \mathbf{R} \cdot \xi \quad \text{avec} \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ -\mathbf{r}/r^3 + X \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Le vecteur ξ se décompose en $\xi_0 + \chi$:

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ -\mathbf{r}/r^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X \end{pmatrix}. \quad (22)$$

L'espace des mouvements képlériens est l'espace quotient $\mathcal{K} = Y/\mathbf{R} \cdot \xi_0$, c'est-à-dire l'espace des courbes intégrales du feuilletage $y \mapsto \mathbf{R} \cdot \xi_0$. Considérons

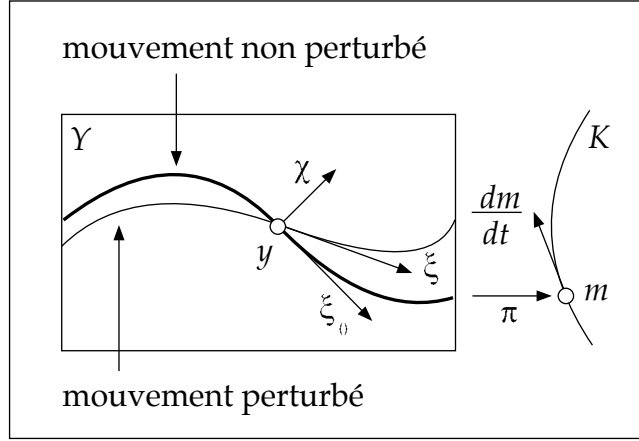


Figure 3: Projection de Y sur $\mathcal{K}$

alors une feuille du feuilletage $y \mapsto \mathbf{R} \cdot \xi$ passant par $y = (t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$. Cette courbe se projette sur l'espace des mouvements képlériens $\mathcal{K}$, son équation est alors :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial y}(\xi) = \frac{\partial m}{\partial y}(\xi_0) + \frac{\partial m}{\partial y}(\chi), \quad (23)$$

où $\partial m / \partial y$ désigne l'application linéaire tangente à la projection $\pi : y \mapsto m$ de Y sur son quotient. Or, par construction $(\partial m / \partial y)(\xi_0) = 0$, il reste donc $dm/dt = (\partial m / \partial y)(\chi)$. La figure 3 illustre parfaitement cette construction. C'est la famille d'équations (4). Enfin, transformée en la famille d'équations (10), elle s'exprime encore, en termes mathématiques actuels :

$$\frac{dm}{dt} = \omega^{-1}(d\Omega), \quad (24)$$

où $d\Omega$ désigne la différentielle de Ω . Par analogie avec le cas euclidien, comme ω est inversible, on appelle *gradient symplectique* de la fonction Ω le champ de vecteurs $\omega^{-1}(d\Omega)$. L'équation différentielle qui décrit la variation des constantes devient après ces conventions de langage :

$$\frac{dm}{dt} = \text{grad}(\Omega). \quad (25)$$

L'évolution du mouvement m , perturbé par le potentiel Ω , est donc la courbe intégrale du gradient symplectique du potentiel de perturbation.

Application à la stabilité séculaire du grand axe

Illustrons cette construction par ce pour quoi elle a été inventée, c'est-à-dire le théorème de Lagrange sur la stabilité du grand axe des planètes. Appliquons la formule 12 à l'époque c :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial c} = [c, a] \frac{da}{dt} + [c, b] \frac{db}{dt} + \dots + [c, k] \frac{dk}{dt}. \quad (26)$$

Lagrange a calculé la valeur de ces crochets, il a montré que les crochets $[c, b]$, $[c, h]$, $[c, i]$, $[c, k]$ sont nuls et qu'il ne reste que :

$$[c, a] = -\frac{1}{2a^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial c} = -\frac{1}{2a^2} \frac{da}{dt}. \quad (27)$$

Mais le demi-grand axe a est égal à $-1/f$, où la constante des forces vives f est le double de l'énergie H du mouvement képlerien, on obtient :

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial c}. \quad (28)$$

Cette formule est en réalité très générale et Lagrange l'établit pour tous les problèmes de mécanique analytique conservatifs [Lag1809].

Comme nous l'avons déjà dit, le potentiel de perturbation Ω (fonction de $\mathbf{r}$) est considéré comme fonction de t et des éléments képlériens (a, b, c, h, i, k) . Mais le temps n'intervient dans Ω que par $t - c$: Ω est fonction de $(a, b, t - c, h, i, k)$. En effet, dans les coordonnées du plan de l'orbite, en prenant pour axe des x l'axe du vecteur excentricité, et en posant $\mathbf{r} = (x, y)$, on a les formules explicites :

$$x = a \sqrt{1 - \frac{b}{a}} + a \cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = \sqrt{ab} \sin(\theta), \quad (29)$$

où θ est l'anomalie excentrique. En notant ϕ_E la fonction :

$$\phi_E : \theta \mapsto \theta - E \sin(\theta) \quad \text{avec} \quad E = \sqrt{1 - \frac{b}{a}}. \quad (30)$$

Cette fonction est inversible (car $E < 1$) et on obtient :

$$x = a \sqrt{1 - \frac{b}{a}} + a \cos \left[\phi_E^{-1} \left(\frac{t - c}{a^{3/2}} \right) \right] \quad \text{et} \quad y = \sqrt{ab} \sin \left[\phi_E^{-1} \left(\frac{t - c}{a^{3/2}} \right) \right]. \quad (31)$$

On en déduit, d'une part, une nouvelle expression pour la formule 28 donnant la variation de l'énergie H :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t}, \quad (32)$$

et on constate, d'autre part, que la fonction Ω est périodique en $t - c$, de période $2\pi a^{3/2}$ (formules 31). Le potentiel peut se développer alors en série trigonométrique. Il est intéressant de noter ce que Lagrange écrit explicitement à ce propos [Lag1808, pages 735–736] :

« comme les valeurs des coordonnées peuvent être réduites en série de sinus et cosinus, il est facile de voir que la fonction Ω pourra être réduite en une série de sinus et cosinus ; ces sinus et cosinus ayant pour coefficients des fonctions des éléments a, b, c , etc. »

Ce que nous exprimons aujourd'hui de la façon suivante :

$$\Omega = \sum_k A_k \exp \frac{ik(t - c)}{a^{3/2}}. \quad (33)$$

Les coefficients A_k étant des fonctions seulement des éléments de l'orbite a, b, h, i, k , l'équation (32) devient alors :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k \neq 0} \frac{ik A_k}{a^{3/2}} \exp \frac{ik(t - c)}{a^{3/2}}. \quad (34)$$

Ainsi que l'énonce Lagrange : la première approximation consiste à regarder dans la fonction Ω tous ces éléments comme constants [Lag1808, page 736] — *i.e.* à considérer, à l'intérieur des fonctions A_k , les éléments de l'orbite comme constants. Sans vouloir commenter la validité de cette affirmation, on obtient ensuite par intégration :

$$H(t) \sim H_0 + \sum_{k \neq 0} A_k \exp \frac{ik(t - c)}{a^{3/2}}. \quad (35)$$

ce premier ordre d'approximation, la fonction H ne contient pas de terme linéaire en t , qu'on appelle le *terme séculaire*, mais seulement des termes périodiques. Laissons à Lagrange le soin de conclure [Lag1808, page 736] :

THÉORÈME (LAGRANGE). *Les grands axes des planètes ne peuvent être sujets qu'à des variations périodiques, et non à des variations croissant comme le temps.*

Ce théorème n'est qu'une application des méthodes de la variation des constantes introduites par Lagrange. Il ne concerne, tel qu'il est présenté ici, que la première approximation (démontré la première fois, mais par d'autres méthodes, par Laplace en 1773). Son véritable théorème sur la stabilité séculaire des grands axes des planètes (où il étend véritablement le résultat de Laplace) est plus délicat car il prend en compte le mouvement de toutes les planètes (consulter par exemple [Ste1969]).

L'importance de cette nouvelle méthode introduite par Lagrange, outre qu'elle formule de façon élégante les principes de la mécanique analytique — en introduisant la structure symplectique de l'espace des mouvements képlériens — facilite aussi le calcul des autres *inégalités*¹⁴. C'est ce qui la rendra célèbre puisque Lagrange montrera que la variation de l'angle du périhélie de Jupiter, observée par les astronomes (mais non encore expliquée à l'époque), est périodique. Il en calculera la période (~ 900 ans si on croit Sternberg [Ste1969]).

Les insuffisances de la méthode

La partie la plus douteuse du travail de Lagrange concerne sûrement la méthode d'approximation utilisée. Il est intéressant de souligner, qu'hormis éventuellement les méthodes d'approximation, les conclusions de Lagrange sont tout à fait légitimes du point de vue de la rigueur mathématique actuelle. En ce sens les transformations qu'il apporte aux équations initiales peuvent paraître sans grande utilité puisque celles qu'il obtient leurs sont absolument équivalentes. Laissons-le parler :

« Ainsi on peut regarder les équations précédentes entre les nouvelles variables a, b, c , etc. comme les transformées des équations en x, y, z ; mais ces transformations seraient peu utiles pour la

¹⁴C'est ainsi qu'on appelait les variations des éléments de l'orbite dues aux perturbations extérieures.

solution générale du problème. Leur grande utilité est lorsque la solution rigoureuse est impossible, et que les forces perturbatrices sont très petites ; elles fournissent alors un moyen d'approximation. ».

Et, c'est un fait. Mais la justification de ces méthodes emploiera un grand nombre de mathématiciens après lui et non des moindres. Poincaré soulignait dans l'introduction de sa célèbre *Nouvelle mécanique céleste* [Poin1892] :

« Ces méthodes qui consistent à développer les coordonnées des astres suivant les puissances des masses, ont en effet un caractère commun qui s'oppose à leur emploi pour le calcul des éphémérides à longue échéance. Les séries obtenues contiennent des termes dits *séculaires*, où le temps sort des signes des sinus et cosinus, et il en résulte que leur convergence pourrait devenir douteuse si l'on donnait à ce temps t une grande valeur.

La présence de ces termes séculaires ne tient pas à la nature du problème, mais seulement à la méthode employée. Il est facile de se rendre compte, en effet, que si la véritable expression d'une coordonnée contient un terme en $\sin \alpha m t$, α étant une constante et m l'une des masses, on trouvera quand on voudra développer suivant les puissances de m , des termes séculaires $\alpha m t - \alpha^3 m^3 t^3 / 6 + \dots$ et la présence de ces termes donnerait une idée très fautive de la véritable forme de la fonction étudiée. »

Cette objection est sans nul doute très pertinente et a conduit, notamment grâce aux travaux de Poincaré, au développement de la géométrie symplectique – en particulier en ce qui concerne son application à la mécanique. De nouvelles théories sont nées comme par exemple la théorie des systèmes complètement intégrables et de leur perturbation qui a donné le fameux théorème¹⁵ de Kolmogorov – Arnold – Moser, sur la stabilité de nombreux mouvements après perturbation (voir [Arn1976] [Arn1980])

¹⁵Théorème difficile.

3 La lettre H

Dans les manuels actuels de mécanique analytique, la lettre H désigne traditionnellement une fonction appelée *hamiltonien* et qui représente l'énergie totale du système étudié, somme de son énergie cinétique et du potentiel des forces d'interaction. Cette notation est ainsi présentée comme un hommage des modernes à Sir William R. Hamilton, célèbre mathématicien irlandais du dix-neuvième siècle. Mais cette interprétation est erronée et résulte d'un malentendu historique. Ainsi que le fait remarquer Souriau dans ses divers textes sur la mécanique symplectique [Sou1986], c'est Lagrange qui désigna pour la première fois, par la lettre H , la constante des forces vives¹⁶ ; non comme un hommage à *Sir W.R. Hamilton* mais à *Christian Huygens*. Que ces deux grands mathématiciens : Huygens et Hamilton partagent la même initiale a conduit à ce malheureux malentendu. Le *hamiltonien* devrait être ainsi renommé : *Huygensien* !

Chacun peut vérifier que dans sa *Mécanique Analytique*, Lagrange désigne bien par la lettre H la constante des forces vives. On peut y lire, à l'article 33, page 268 [Lag1811, tome I, seconde partie, deuxième édition] :

« L'équation précédente devient

$$\mathbf{S} \left(\frac{dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z}{dt^2} + d\Pi \right) m = 0$$

dont l'intégrale est

$$\mathbf{S} \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} + \Pi \right) m = \mathbf{H}$$

dans laquelle la lettre $\mathbf{H}$ désigne une constante arbitraire, égale à la valeur du premier membre de l'équation à un instant donné.

Cette dernière équation renferme le principe connu sous le nom de *Conservation des forces vives*. En effet, $dx^2 + dy^2 + dz^2$ étant le

¹⁶Si la *force vive* désigne le double de l'énergie cinétique, la *constante des forces vives*, elle, représente l'énergie totale.

carré de l'espace que le corps parcourt dans l'instant dt , $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$ sera le carré de sa vitesse et $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}m$ sa force vive. Donc $\mathbf{S}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}m$ sera la somme des forces vives de tous les corps, ou la force vive de tout le système ; et l'on voit par l'équation dont il s'agit, que cette force vive est égale à la quantité $2\mathbf{H} - 2\mathbf{S}\Pi m$, laquelle dépend simplement des forces accélératrices qui agissent sur les corps, et nullement de leur liaison mutuelle, de sorte que la force vive du système est à chaque instant la même que les corps auraient acquises si, étant animés des mêmes puissances, ils s'étaient mus librement chacun sur la ligne qu'il a décrite. C'est ce qui fait donner le nom de *Conservation des forces vives* à cette propriété du mouvement. »

Le principe des forces vives

C'est dans ce texte, même pas dans les articles fondateurs [Lag1808, Lag1809, Lag1810] de *La Dynamique*¹⁷, qu'apparaît pour la première fois la lettre H pour désigner la *constante des forces vives*, c'est-à-dire l'*énergie totale* du système. Nous continuons à observer cette convention mais avec une idée erronée de son origine.

Le *Principe de conservation des forces vives* est maintenant connu sous le nom de *Théorème de conservation de l'énergie* ; mais ce changement de dénomination cache un glissement sémantique, justement suggéré par l'apparition de cette constante. En effet, comme on le voit clairement dans l'équation précédente, et comme il est exprimé (suggéré sans être dit) : la force vive n'est évidemment pas conservée ! La tentative de justification de cette « conservation » reste confuse, et la question n'est vraiment réglée qu'avec l'introduction, par Lagrange, de la constante d'intégration $\mathbf{H}$.

Comme on peut le vérifier aussi, à la date de parution de cet ouvrage, en

¹⁷seconde partie de *La Mécanique Analytique*.

1811, Hamilton n'avait que cinq ans. Le fait est indéniable : même s'il a été un enfant prodige, H n'est pas pour Hamilton, mais Lagrange n'explique pas, à cet endroit du texte (tome I, seconde partie, article 33), la raison de son choix. Il faut aller chercher ailleurs ses motivations. Précisément dans l'Introduction à la Seconde Partie de la Mécanique, Première Section : *Sur les principes de la dynamique*. Outre son intérêt immédiat, sa lecture va éclairer ce petit mystère. Voici ce qui est écrit à l'article 14 de la première section de la seconde partie du tome I de la mécanique de Lagrange :

« Le premier de ces quatre principes, celui de la conservation des forces vives, a été trouvé par Huygens, mais sous une forme un peu différente de celle qu'on lui donne présentement ; et nous en avons déjà fait mention à l'occasion du problème des centres d'oscillations.

...

Ainsi le principe de Huygens se réduit à ce que, dans le mouvement des corps pesants, la somme des produits des masses par les carrés des vitesses à chaque instant est la même soit que les corps se meuvent conjointement d'une manière quelconque, ou qu'ils parcourent librement les mêmes hauteurs verticales.

...

Il [Huygens] donna ainsi à ce principe le nom de *conservation des forces vives*, et il s'en servit avec succès pour résoudre quelques problèmes qui ne l'avaient pas encore été, et dont il parvenait difficile de venir à bout par des méthodes directes. »

Le centre d'oscillation du pendule composé

Au nombre des problèmes, résolus par Huygens grâce au principe de conservation des forces vives, le plus important pour notre propos est celui du Centre d'Oscillations. Ce problème fut posé à Huygens par *le très savant*

Mersenne (dixit Huygens [Huy1673, page 90 de l'édition originale, citation extraite de la traduction française]) :

Le très savant Mersenne me proposa jadis, presque encore enfant, et à de nombreux autres, la recherche du Centre d'Oscillations ou d'Agitation, question tout à fait fameuse parmi les Géomètres de ce temps. . .

Il s'agissait de déterminer le *pendule simple* isochrone à un *pendule composé*. C'est-à-dire le pendule simple dont le battement est identique à celui d'un pendule composé donné. Laissons de nouveau à Lagrange le soin de nous exposer le problème [article 7 de la première section de la seconde partie du tome I de l'ouvrage sus-cité] :

« Un fil considéré comme une ligne inflexible, sans pesanteur et sans masse, étant attaché par un bout à un point fixe, et chargé à l'autre bout d'un petit poids qu'on puisse regarder comme réduit à un point, forme ce qu'on appelle un pendule simple ; et la loi des vibrations de ce pendule dépend uniquement de sa longueur, c'est-à-dire de sa distance entre le poids et le point de suspension. Mais si à ce fil on attache encore un ou plusieurs poids à différentes distances du point de suspension, on aura alors un pendule composé, dont le mouvement devra tenir une espèce de milieu entre ceux des différents pendules simples que l'on aurait, si chacun de ces poids était suspendu seul au fil. Car la force de gravité tendant d'un côté à faire descendre tous les poids également dans le même temps, et de l'autre l'inflexibilité du fil les contraignant à décrire des arcs inégaux et proportionnels à leur distance du point de suspension, il doit se faire entre ces poids une espèce de compensation, et de répartition de leurs mouvements, en sorte que les poids qui sont les plus proches du point de suspension hâteront les vibrations des plus éloignés, et ceux-ci, au contraire, retarderont les vibrations des premiers. Ainsi il y aura dans le fil un point ou un corps étant placé, son mouvement

serait ni accéléré ni retardé par les autres poids, mais serait le même que s'il était seul suspendu au fil. Ce point sera donc le vrai centre d'oscillation du pendule composé, et un tel centre doit se trouver dans tout corps solide de quelque figure que ce soit, qui oscille autour d'un axe horizontal. »

Le problème est bien posé, il est d'importance puisque les horloges sont réglées justement grâce à des poids répartis sur leur balancier. Continuons notre lecture :

« Huygens vit qu'on ne pouvait déterminer ce centre d'une manière rigoureuse, sans connaître la loi suivant laquelle les différents poids du pendule composé altèrent mutuellement les mouvements que la gravité tend à leur imprimer à chaque instant ; mais au lieu de chercher à déduire cette loi des principes fondamentaux de la Mécanique, il se contenta d'y suppléer par un principe indirect, lequel consiste à supposer que si plusieurs poids attachés, comme on le voudra, à un pendule, descendent par la seule action de la gravitation, et que, dans un instant quelconque, ils soient détachés et séparés les uns des autres, chacun d'eux, en vertu de la vitesse acquise pendant sa chute, pourra remonter à une telle hauteur, que le centre commun de gravité se trouvera remonté de la même hauteur d'où il était descendu. »

Voilà donc le principe, prémisse de la conservation des forces vives. Et Lagrange d'ajouter :

« On ne saurait deviner ce qui a donné à l'auteur l'idée d'un tel principe

...

Quoi qu'il en soit, ce principe fournit une équation entre la hauteur verticale, d'où le centre de gravité du système est descendu dans un temps quelconque, et les différentes hauteurs verticales

auxquelles les corps qui composent le système pourraient remonter avec leur vitesses acquises, et qui, par le théorème de Galilée, sont comme le carré de ces vitesses. »

Voilà qui montre clairement comment la conservation des forces vives résout le problème du pendule composé. En vérité, le problème n'était pas encore considéré comme définitivement réglé. Les principes posés par Huygens n'étaient pas tout à fait ceux énoncés plus haut, et il fallait les fonder davantage. C'est Jacques Bernoulli qui satisfera définitivement les mécaniciens de l'époque. Mais tout cela est admirablement conté dans l'introduction à La Dynamique de la Mécanique de Lagrange (articles 6 à 14) et nous y renvoyons le lecteur, pour son plaisir.

Horlogium Oscillatorium

Cela dit, avant de clore définitivement ce paragraphe il nous faut encore préciser où et comment Huygens a présenté lui-même sa découverte. Pour cela il faut lire la proposition V de la quatrième partie de l'*Horlogium Oscillatorium* [Huy1673, page 99 de l'édition originale, citation extraite de la traduction française] :

PROPOSITION V

« Etant donné un pendule composé des poids que l'on veut, si chacun est multiplié par le carré de sa distance à l'axe d'oscillation, et que la somme des produits soit divisée par le produit fait de la somme des poids par la distance au même axe d'oscillation du centre de gravité commun à tous ; il paraît la longueur du pendule simple isochrone au composé, soit la distance entre l'axe et le centre d'oscillation même du pendule composé. »

C'est dans la démonstration de cette proposition, qui donne la solution du problème du pendule composé, qu'apparaît, cachée mais bien là, la constante des forces vives. On peut lire en effet, à la page 100 de cet ouvrage :

« Mais comme le carré de la vitesse du point L qu'il possède en P est au carré de de la vitesse du point A en T, ainsi est la hauteur à laquelle L peut monter par la première vitesse, à la hauteur à laquelle A peut monter par la deuxième vitesse... »

Ainsi, le mystère de la lettre H est définitivement éclairci et accordons à Huygens le mérite de la découverte de la conservation de l'énergie, comme l'on nomme aujourd'hui son principe, ou plutôt ce théorème. Mais il est important de souligner qu'après les Huygens, Bernoulli et autres, celui qui a donné son sens moderne à ce principe, qui l'a établi dans toute sa rigueur, analytique, c'est Lagrange. Et c'est encore aujourd'hui, de la même façon qu'il a démontré il y a deux cents ans, que ce principe est enseigné dans nos facultés.

4 Parenthèses de Lagrange ou crochets de Poisson ?

Dans les cours de mécanique actuels, il est plus fréquent de voir cités les *crochets de Poisson* plutôt que les *crochets* ou les *parenthèses de Lagrange* ; or, il ne fait aucun doute que l'introduction des divers types de crochets/parenthèses en mécanique analytique est due à J.-L. Lagrange. Quel a donc été le rôle de Poisson ? On peut lire dans le premier article de Lagrange sur ce sujet [Lag1808, pp. 717–718], le texte suivant :

« Dans un mémoire lu à l'académie de Berlin en 1776, je considérai d'une manière directe les variations auxquelles peut être sujet le grand axe d'une planète par les forces perturbatrices provenant de l'action des autres planètes, et je réduisis ces variations à une formule générale et très simple qui, ne dépendant que de la différentielle partielle d'une fonction finie relativement au mouvement moyen de la planète, fait voir tout de suite que le grand axe ne peut jamais contenir aucun terme proportionnel au temps,

quelque loin qu'on continue l'approximation par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites, mais en s'arrêtant à la première approximation par rapport aux termes proportionnels aux masses des planètes.

On n'avait pas été plus loin sur ce point ; mais M. Poisson y a fait un pas de plus dans le *Mémoire* qu'il a lu il y a deux mois à la classe, *sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes*, et dont nous avons fait le Rapport dans la dernière séance. Il a poussé l'approximation de la même formule jusqu'aux termes affectés des carrés et des produits des masses, en ayant égard dans cette formule à la variation des éléments que j'avais regardés comme constants dans la première approximation.

[...]

Cette découverte de M. Poisson a réveillé mon attention sur un objet qui m'avait autrefois beaucoup occupé, et que j'avais ensuite totalement perdu de vue. Il me parut que le résultat qu'il venait de trouver par le moyen des formules qui représentent le mouvement elliptique était un résultat analytique dépendant de la forme des équations différentielles et des conditions de la variabilité des constantes, et que l'on devait y arriver par la seule force de l'analyse, sans connaître les expressions particulières des quantités relatives à l'orbite elliptique.

[...]

J'ai obtenu des formules qui donnent les différentielles de ces variations sous une forme plus simple que celle des formules connues jusqu'à présent.

[...]

Ces formules ont de plus l'avantage que, étant appliquées aux variations du grand axe, on en voit naître tout de suite des expressions analogues à celles auxquelles M. Poisson n'est parvenu que par des réductions heureuses des formules déduites de la considération du mouvement elliptique. »

Ces formules, auxquelles Lagrange fait allusion, sont celles qui ont été exposées précédemment, et qui expriment les forces de perturbation relativement aux éléments des planètes en fonction de la variation des constantes et des parenthèses de Lagrange (équation 12). Quant à l'article de Poisson auquel Lagrange fait référence, il est publié dans le cahier numéro 15 du *Journal de l'école polytechnique* [Pois1808]. Comme on peut le constater à sa lecture, cet article de Poisson ne comporte aucune définition des *crochets de Poisson*. Comme le dit Lagrange, la méthode est traditionnelle, les calculs des perturbations y sont simplement poussés davantage que dans les articles précédents de Laplace ou de Lagrange. Alors comment s'explique cette apparition des crochets de Poisson ?

Depuis longtemps, Lagrange avait l'habitude d'utiliser des *parenthèses* ou *crochets* dans les développements en séries perturbatives, où ils apparaissent comme les coefficients des différentielles des éléments perturbés, Lagrange y regroupait l'ensemble des variables dont ces coefficients dépendaient. Ces notations sont utilisées, en particulier, dans son article de 1781 sur la *Théorie des variations séculaires* [Lag1781]. Il n'est donc pas étonnant de les voir apparaître à nouveau dans ce *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes* en 1808. Seulement, comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, dans le cas particulier de la variation des constantes dans les problèmes de la mécanique, cette notation, qui n'était qu'une commodité jusqu'alors, révèle une structure sous-jacente tout à fait particulière, connue aujourd'hui comme *structure symplectique* de l'espace des solutions du système des planètes. Plus précisément : ces parenthèses sont les coordonnées covariantes de cette structure symplectique.

Quelques mois après son premier mémoire, Lagrange comprend la portée universelle de sa découverte et généralise sa méthode à tous les problèmes de la mécanique. Pour apprécier ensuite l'apport de Poisson, il est nécessaire d'entrer à nouveau au cœur de cette méthode : Lagrange développe les forces perturbatrices par rapport aux éléments képlériens des planètes (et de façon plus générale par rapport aux constantes d'intégration du système). Ces forces sont des combinaisons linéaires des variations des éléments eux-mêmes et les coefficients de ces variations sont les parenthèses de Lagrange.

Pour obtenir la variation des éléments des planètes, en fonctions des forces perturbatrices, il faut alors inverser le système linéaire ainsi obtenu dont les coefficients sont les parenthèses. Lagrange dit lui-même [Lag1808, p. 731] :

« Il s'ensuit qu'on pourra également exprimer les différentielles $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}, \dots$ par les différences partielles de la fonction Ω relatives aux éléments $a, b, c, \dots$, multipliées par de simples fonctions de ces quantités sans t ; car il n'y aura qu'à déduire les valeurs de ces différentielles des six équations précédentes par les méthodes ordinaires de l'élimination, et il est visible qu'elles seront toutes de la forme

$$\left(A \frac{d\Omega}{da} + B \frac{d\Omega}{db} + C \frac{d\Omega}{dc} + F \frac{d\Omega}{df} + G \frac{d\Omega}{dg} + H \frac{d\Omega}{dh} \right) dt,$$

dans laquelle les coefficients $A, B, C, F, \dots$ ne seront donnés que par les coefficients $(a, b), (a, c), (b, c), \dots$, et ne seront par conséquent que de simples fonctions de ces éléments sans t ; ce qui fournit un Théorème très-important et très-utile dans la théorie des perturbations des planètes. »

Ce sont évidemment ces coefficients $A, B, C, F, \dots$ qui, considérés par Poisson comme fonctions des conditions initiales du mouvement¹⁸ (temps, position, vitesse) vont devenir les *crochets de Poisson* des constantes $a, b, c, \dots$ du mouvement. Poisson donne leur construction dans son mémoire intitulé *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de Mécanique*, publié à la suite du mémoire *Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique* de Lagrange [Lag1809]. Voici ce que Poisson écrit dans ce mémoire, lu à l'Institut le 16 octobre 1809 et publié dans le *Journal de l'école polytechnique* [Pois1809, pp. 268–269] :

¹⁸Remarquez la différence de point de vue : pour Lagrange, un ensemble de constantes d'intégration $(a, b, c, \dots)$ définit un mouvement : ce sont les formules (31) et (??) ; les positions et vitesses sont alors fonctions des constantes d'intégration. Poisson considère les constantes d'intégration comme fonctions des conditions initiales. C'est cette différence de point de vue qui conduit naturellement à des formules inverses les unes des autres.

« Les formules du dernier Mémoire de M. Lagrange sont inverses des nôtres : elles donnent les différences partielles de la même fonction, au moyen des différentielles des constantes arbitraires. Je les rapporte dans la suite de ce mémoire afin de les comparer à celles que nous avons obtenues, et de montrer la singulière analogie qui existe entre ces deux genres de formule. »

Il ajoute plus loin, aux pages 289–290 du même mémoire, faisant référence au Théorème de Lagrange cité plus haut :

« M. Lagrange démontre directement que les quantités $[a, b]$, $[a, c]$, $[a, b]$, &c. sont des fonctions de a, b, c, e, f, g, h , qui ne renferment pas le temps d'une manière explicite ; d'où l'on conclut ensuite que, par des éliminations entre les équations que nous citons, on obtiendra des valeurs de $da, db, dc, de, df, dg, dh$, exprimés au moyen des différences partielles de Ω prises par rapport à a, b, c , &c., et multipliées par des fonctions de ces constantes. Nos formules ont l'avantage de donner immédiatement ces valeurs. »

En effet, les formules de Poisson, données à la page 282 du mémoire en question, sont bien les coefficients $A, B, C, F, \dots$ de Lagrange, donnés comme fonctions des conditions initiales. Il faut noter qu'au passage, Poisson note les parenthèses de Lagrange par des crochets, et ses propres crochets par des parenthèses, ce qui ajoute à la confusion.

La riposte de Lagrange ne tarde pas. Réalisant qu'il a laissé échapper un aspect relativement important de sa propre théorie, Lagrange publie quelques mois après un second mémoire *sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*. Dans ce mémoire, lu à l'Institut le 19 février 1810, il donne sa version personnelle de l'inversion du système des parenthèses qui portent son nom. Il écrit dans l'introduction de ce mémoire [Lag1810, p. 810] :

« Mais l'application des formules générales aux Problèmes particuliers demandait encore un long calcul, à cause des éliminations

qu'il fallait faire pour obtenir séparément l'expression de la variation de chacune des constantes devenues variables. Heureusement une considération très simple, que je vais exposer et qui m'avait échappé, facilite et simplifie extrêmement cette application et ne laisse plus rien à désirer dans la Théorie analytique de la variation des constantes, relativement aux questions de la Mécanique. »

Toutefois, le mémoire de Lagrange ne se réduit pas à celui de Poisson, comme il l'écrit à la page 812 :

« M. Poisson a lu, le 16 octobre dernier à cette Classe, un *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de Mécanique*, lequel est imprimé dans le volume qui vient de paraître du *Journal de l'École Polytechnique*. Ce Mémoire contient une savante analyse qui est comme l'inverse de la mienne, et dont l'objet est d'éviter les éliminations que celle-ci exigeait. L'Auteur parvient en effet, par un calcul assez long et délicat, à des formules qui donnent directement les valeurs des différentielles des constantes arbitraires devenues variables. Ces formules ne coïncident pas immédiatement avec celles que je donne dans ce Mémoire, parce qu'elles renferment les constantes arbitraires en fonction des variables du Problème et de leurs différentielles, au lieu que les nôtres ne renferment ces constantes qu'en fonction d'autres constantes ; mais il est facile de se convaincre *à priori* qu'elles conduisent aux mêmes résultats. »

Autrement dit, Lagrange exprime la matrice inverse de son système de parenthèses en termes d'un autre système de coordonnées de l'espace des solutions du problème. Ce qui, effectivement, ne coïncide pas immédiatement avec l'analyse de Poisson. Ce que publie Lagrange, c'est plutôt l'expression générale des *transformations canoniques*. Que faut-il alors retenir de ces deux points de vue, de Poisson et de Lagrange, de ces analyses qui, tout en étant différentes, sont si semblables ? Voici quelques remarques qui, prises ensemble, peuvent expliquer cette « négligence » de Lagrange :

1. Les parenthèses de Lagrange, dans son premier mémoire de 1808, sont les coordonnées covariantes de la forme symplectique ; les crochets de Lagrange, dans son mémoire de 1810, en sont les coordonnées contravariantes. Qu'elles soient exprimées en fonction d'autres constantes du mouvement ou en tant que fonction des conditions initiales (temps, position, vitesse), c'est en tant que coordonnées de la forme symplectique qu'elles sont exploitées pour étudier les problèmes des inégalités séculaires¹⁹ (théorie des perturbations).
2. C'est la matrice des parenthèses, fonction des constantes du mouvement, qui est utile, et utilisée, pour l'intégration des perturbations. Les crochets de Poisson sont difficilement exploitables pour cet usage puisqu'ils sont exprimés en fonction des conditions initiales.
3. En revanche, si les parenthèses de Lagrange mettent en évidence la structure symplectique de l'espace des solutions des systèmes de la mécanique, le théorème de Poisson met en évidence la structure d'algèbre de Lie des fonctions sur cette variété symplectique.

Pourquoi l'histoire a-t-elle retenu davantage les crochets de Poisson plutôt que les parenthèses de Lagrange²⁰, tout au moins dans les manuels de mécanique ? Peut-être parce que la seule façon de bien comprendre ces constructions de Lagrange c'est de les placer dans le cadre formel de la géométrie symplectique et que la géométrie de l'époque n'était pas encore prête ? Peut-être aussi parce que, si la construction de Lagrange est bien adaptée aux systèmes dont on connaît *a priori* l'intégration complète dans certaines conditions (on pourrait parler de *complète intégrabilité*), elle l'est moins lorsque l'on ne peut pas considérer le système réel comme une perturbation d'un système intégré.

¹⁹L'apparition des crochets de Poisson comme méthode pour obtenir de nouvelles constantes du mouvement en fonction de certaines connues est légèrement postérieure.

²⁰Pour ajouter à la confusion, entre les premiers articles de Lagrange et sa *Mécanique Analytique* les parenthèses deviennent crochets et les crochets, parenthèses. Alors que dans l'article de Poisson, ce que nous appelons *crochets de Poisson* est noté par des parenthèses. Autrement dit, l'influence de Poisson sur Lagrange aura quand même conduit ce dernier à changer de notations.

Mais, dans ces conditions, l'approche poissonnienne est-elle mieux adaptée ? On peut réfléchir aussi à la question suivante : pourquoi a-t-il fallu plus d'un siècle et demi pour redécouvrir l'œuvre de Lagrange, effacée devant celle de ses épigones ? Je laisse là ces questions à la méditation du lecteur.

En conclusion, je conseille vivement la lecture de l'ensemble des textes de Lagrange : trois mémoires déjà cités [Lag1808, Lag1809, Lag1810] et la *Mécanique Analytique* [Lag1811]. L'écriture de Lagrange est agréable, explicative et plus moderne qu'on ne peut l'imaginer *a priori*. En particulier, les introductions des chapitres sont de pures merveilles et des textes essentiels pour la compréhension de son œuvre et de l'histoire de la mécanique. Il vaut mieux éviter toutefois, en première lecture, les notes de Joseph Bertrand qui émaillent le texte de la *Mécanique Analytique* dans sa troisième édition. Elles portent sur des détails souvent peu importants et ne commentent pas les idées nouvelles qui y fourmillent.

5 Notes biographiques

Joseph-Louis Lagrange est né à Turin en 1736, d'une famille originaire de France. Il succède à Euler à Berlin en 1766, et y reste jusqu'en 1787, date à laquelle il vient à Paris en tant que membre vétérane de l'Académie des sciences. Il publie en 1788²¹ la première version de sa *Mécanique Analytique*, puis publie en 1811 la première partie de la deuxième version qui contient pour la première fois des éléments de calcul symplectique. Il meurt à Paris en 1813 et le deuxième volume de sa *Mécanique* n'est publié qu'après sa mort en 1816.

Siméon Denis Poisson est né à Pithiviers en 1781. Il fut l'élève de Laplace et de Lagrange. Il enseigna à l'École polytechnique à partir de 1802 et fut nommé astronome au bureau des longitudes en 1808. Il meurt à Sceaux en 1840.

²¹Prête semble-t-il en 1782.

Bibliographie

- [Arn1976] V. I. Arnold. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Éditions MIR, Moscou, 1976.
- [Arn1980] V. I. Arnold. *Chapitres supplémentaires à la théorie des équations différentielles*. MIR, Moscou, 1980.
- [dG1987] F. de Gandt. Force et géométrie. Thèse de doctorat, Paris I, 1987.
- [Huy1673] C. Huygens. *Horlogium Oscillatorium*. Édité par François Muguet, Paris 1673. Traduit du Latin par Jean Peyroux. Édition Bergeret, rue Leyteire, Bordeaux 1980.
- [Lag1811] J.-L. Lagrange. *Mécanique analytique*. Librairie Albert Blanchard, Paris, 1965. Fac-similé de la troisième édition.
- [Lag1808] J.-L. Lagrange. Sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, pages 713–768. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Lu, le 22 août 1808 à l’Institut de France.
- [Lag1809] J.-L. Lagrange. Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, pages 771–805. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Lu, le 13 mars 1809 à l’Institut de France.
- [Lag1810] J.-L. Lagrange. Second mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, pages 809–816. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Lu, le 19 février 1810 à l’Institut de France.
- [Lag1774] J.-L. Lagrange. Sur les intégrales particulières des équations différentielles. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, page 5.

Gauthier-Villars, Paris, 1877. Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, année 1774.

- [Lag1775] J.-L. Lagrange. Recherches sur Les suites récurrentes. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, page 151. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, année 1775.
- [Lag1779] J.-L. Lagrange. Sur différentes questions d'analyse relatives à la théorie des intégrales particulières. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, pages 585. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, année 1779.
- [Lag1781] J.-L. Lagrange. « Théorie des variations séculaires des éléments des planètes ». In *Œuvres de Lagrange*, volume V, pp. 128-207. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, 1781.
- [Poin1892] Henri Poincaré. *Les nouvelles méthodes de la mécanique céleste*. Gauthier-Villars, Paris, 1892.
- [Pois1808] S. D. Poisson. « Sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes ». *Journal de l'école polytechnique*, 15 : 1–56, 1808. Lu à l'Institut le 20 juin 1808.
- [Pois1809] S. D. Poisson. « Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique ». *Journal de l'école polytechnique*, 15 : 266–344, 1809. Lu à l'Institut le 16 octobre 1809.
- [Sou1969] J.-M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod, Paris, 1970.
- [Sou1986] J.-M. Souriau. La structure symplectique de la mécanique décrite par Lagrange en 1811. *Math. Sci. hum.*, (94) : 45–54, 1986.
- [Ste1969] S. Sternberg. *Celestial Mechanics*. W. A. Benjamin Inc., New-York, 1969.

[Wey1946] H. Weyl. *Classical Groups*. Princeton University Press, 1939–1946.

Centre de Mathématique et d'Informatique
39 rue F. Joliot-Curie
13453 Marseille cedex 13

patrick.iglesias-zemmour@laposte.net