ministère
éducation nationale enseignement supérieur recherche
ÉduSCOL [desco]
Liberté · Égalité · Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Baccalauréat des voies générale et technologique

Mathématiques spécialité série STG

Exemple d'exercices

Date 28 Avril 2006

Exercice n° 1 (toutes spécialités).

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte.
On demande de cocher celle que vous pensez être correcte.

Le prix d'un produit A augmente de 5,4 % la première année et augmente de 30 % la seconde année.

1. À l'issue de la première année, le prix du produit a été multiplié par :
   - ☐ 0,946
   - ☐ 1,540
   - ☐ 1,054
   - ☐ 0,094
2. À l'issue des deux années, le prix a augmenté de :
   - ☐ 16,2 %
   - ☐ 37,02 %
   - ☐ 24,6 %
   - ☐ 35,4 %
3. Le taux d'évolution annuel moyen sur les deux années est de :
   - ☐ 16,2 %
   - ☐ 24,6 %
   - ☐ 17,7 %
   - ☐ 17,1 %
4. Si le produit avait augmenté de 5,4 % par an durant 6 ans, le taux d'évolution pour ces six années aurait été de :
   - ☐ 32,4 %
   - ☐ 37,1 %
   - ☐ 38,3 %
   - ☐ 35,4 %

Exercice n° 2 (toutes spécialités).

Un magasin de chaussures a fait 300 000 € de chiffre d'affaires pour l'année 2001. Ce chiffre d'affaires a évolué les années suivantes selon le tableau ci-dessous. La deuxième ligne donne le taux d'évolution par rapport à l'année précédente, la troisième ligne donne le chiffre d'affaires pour l'année.

Année	2001	2002	2003	2004	2005
Taux d'évolution		+ 25,0 %	+ 16,0 %	+ 12,2 %	+ 5,3 %
Chiffre d'affaires arrondi au millier d'euros (€)	300 000	375 000	435 000		514 000

Les résultats seront arrondis au millier d'euros.

1. Calculer le chiffre d'affaires pour 2004.
2. Quel est le taux d'évolution de l'année 2001 à l'année 2005 ?
3. (a) Calculer le taux d'évolution annuel moyen de l'année 2001 à l'année 2005 (donner la valeur arrondie à 0,1 %).

   (b) Si le taux d'évolution du chiffre d'affaires de l'année 2006 par rapport à celui l'année 2005 était égal à ce taux moyen, quel serait le chiffre d'affaires en 2006 ?

Exercice n° 3 (toutes spécialités).

Un hypermarché propose des yaourts à boire dans son rayon « produits laitiers ». Il les achète conditionnés par paquets de quatre à 1€ le paquet. Actuellement, il vend 3 000 paquets par semaine à 2,72 € le paquet.

Le responsable du rayon a la possibilité de changer les prix une fois par semaine. Il estime que toute baisse de prix de 10 centimes d'euros fait augmenter la vente de 300 paquets.

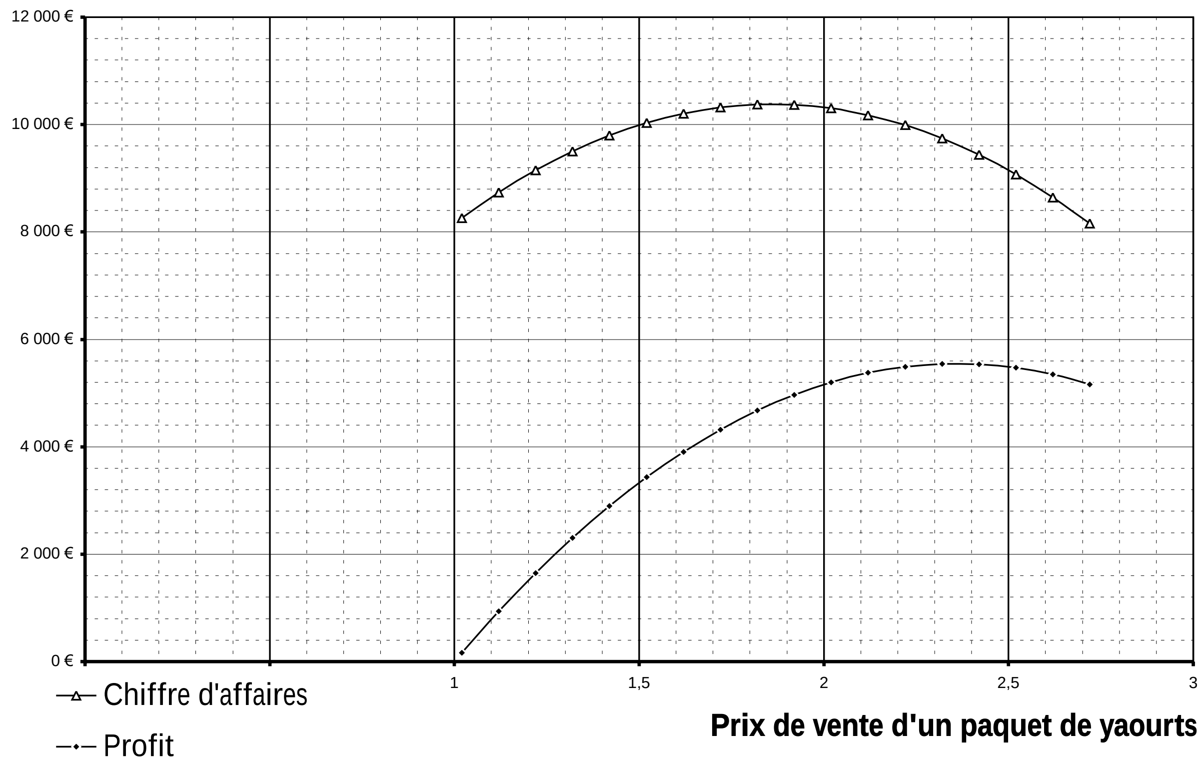
1. Le responsable du rayon voudrait savoir quel prix de vente choisir pour obtenir le profit maximum. Il fait une étude sur tableur de l'incidence de baisses successives de 10 centimes d'euros.

   Expliciter des formules à écrire dans les cellules A3, B3, C3, D3 et E3, à recopier vers le bas respectivement sur les plages A4:A19, B4:B19, C4:C19, D4:D19 et E4:E19 pour réaliser la feuille de calcul ci-dessous.

   Remarque : On ne demande pas de recopier le tableau ci-dessous.

	A	B	C	D	E
1	Prix de vente d'un paquet en euros	Nombre de paquets vendus	Chiffre d'affaires en euros	Montant de l'achat	Profit en euros
2	2,72	3000	8160	3000	5160
3		3300			5346
4		3600			5472
5		3900			5538
6		4200			5544
7		4500			5490
8		4800			5376
9		5100			5202
10		5400			4968
11		5700			4674
12		6000			4320
13		6300			3906
14		6600			3432
15		6900			2898
16		7200			2304
17		7500			1650
18		7800			936
19		8100			162

2. À l'aide du tableau évoqué dans la question précédente, on a obtenu le graphique ci-dessous.



(a) Quel est le prix d'un paquet de yaourts qui donne le chiffre d'affaires maximum ?
(b) Quel est le prix d'un paquet de yaourts qui donne le profit maximum ?
(c) Le profit est-il proportionnel au nombre de paquets vendus ? Justifier la réponse.

Exercice n° 4 (toutes spécialités).

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte.
On demande de cocher celle que vous pensez être correcte.

On demande de cocher la bonne réponse.

Le prix d'un produit est passé de 200 euros à 800 euros. Le taux d'évolution est de :	100 % ☐	200 % ☐	300 % ☐	400 % ☐
Un produit subit une augmentation de 10 % suivie d'une nouvelle augmentation de 5 %. Son prix de départ étant P, après ces deux augmentations son prix est de :	(P × 10 %) × 5 % ☐	P + (P × 15 %) ☐	P + 15 % ☐	P ×1,1 × 1,05 ☐
Lors des élections, un parti a obtenu au premier tour 38 % des voix exprimées avec un taux de participation de 60 % et au second tour, 29 % des voix avec un taux de participation de 80 %. Le nombre de voix exprimées obtenu par le parti a connu, entre le premier et le second tour :	Une stagnation ☐	Une diminution ☐	Une augmentation ☐	On ne peut pas répondre car on ne connaît pas le nombre de votants. ☐
Le taux mensuel moyen équivalent à un taux annuel de 9 % dans le cas d'un placement à intérêts composés, arrondi à 0,01 %, est :	0,75 % ☐	1,20 % ☐	0,72 % ☐	1,01 % ☐

Exercice n° 5 (toutes spécialités).

Les parties ***A*** *et* ***B*** *sont indépendantes.*

Partie A

On a pu lire dans le livre « Voici venu le temps du monde fini » d'Albert Jacquard l'affirmation suivante :

Un accroissement d'une population de 2 % par an peut sembler bien faible, il correspond pourtant à un doublement en 35 ans, donc à un quadruplement en 70 ans, à une multiplication par 7 en moins d'un siècle.

Les affirmations de l'auteur sont-elles exactes ? Justifier la réponse.

Partie B

1. La feuille de calcul suivante, extraite d'un tableur, donne la population mondiale en millions d'habitants :

	A	B	C	D	E
1	*Année*	*Population*	*Taux d'évolution arrondi à* 0,1 %	n	u_n
2	1950	2500		0	2 500
3	1960	3014	20,6 %	1	
4	1970	3683	22,2 %	2	
5	1980	4453	20,9 %	3	
6	1990	5201		4	
7	2000	6080		5	
8				6	
9				7	
10				8	
11				9	

Quelle formule faut-il écrire en C3 pour compléter la colonne C en recopiant cette formule vers le bas ?

2. (a) Calculer le taux d'évolution global de la population mondiale entre les années 1950 et 2000. En déduire le taux décennal moyen entre les années 1950 et 2000.

On considère la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 2500$ et de raison $q = 1{,}195$.

(b) Quelle formule, à recopier vers le bas, peut-on écrire en E3 pour calculer les termes de la suite u ?

(c) Si l'on fait l'hypothèse que la population mondiale évoluera au même rythme au delà de l'an 2000, on peut estimer que la population mondiale de l'année $(1950+10n)$ sera environ égale au terme u_n de cette suite.
Quelle population peut-on ainsi prévoir pour l'an 2010 ? Pour l'an 2050 ?

(d) Par combien la population mondiale serait-elle ainsi multipliée en un siècle ?

Exercice n$^\circ$ 6 (spécialité « 3 heures »).

1. On place un capital de 2 000 € à intérêts composés au taux mensuel de 0,7 %.
   (a) Quelle est la valeur acquise au bout d'un mois ? De deux mois ?
   (b) Quelle est la valeur acquise au bout de n mois ?
   (c) Quel est le taux d'évolution du capital au bout d'une année ?
2. (a) Donner une valeur décimale arrondie à 10^{-5} près du nombre réel t_1 tel que $(1+t_1)^{12} = 1{,}12$. Pour un placement annuel au taux de 12 %, t_1 est le taux mensuel équivalent.
   (b) Donner une valeur décimale arrondie à 10^{-5} près du nombre réel t_2 tel que $(1+t_2)^{12} = 1{,}03$. Pour un placement annuel au taux de 3 %, t_2 est le taux mensuel équivalent.
   (c) Une publicité d'un organisme bancaire annonce : « Pour un placement d'un capital de 1 000 € sur un an, le taux annuel est 12 % sur les deux premiers mois puis 3 % sur dix mois ». Déterminer le taux d'évolution du capital sur un an.

Prolongement possible en classe

3. Deux offres sont faites par des organismes concurrents :

   Offre O_1 « Pour un placement d'un capital de 1 000 € sur un an au taux annuel de 3 %, les intérêts obtenus au bout des deux premiers mois sont quadruplés ».

   Offre O_2 « Pour un placement d'un capital de 1 000 € sur un an au taux annuel de 3 %, les intérêts obtenus le douzième mois sont doublés ».

   Ces offres sont-elles plus avantageuses que celle de la question 2(c) ?

Exercice n° 7 (toutes spécialités).

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte.
On demande de cocher celle que vous pensez être correcte.

1. Le nombre de clients de téléphonie mobile en France, le 30 septembre 2005, était estimé à 45 000 000. 35 % d'entre eux étaient clients d'un opérateur A ; quelle est la meilleure approximation du nombre de clients de l'opérateur A ?

   13 500 000 ☐ 16 000 000 ☐ 35 000 000 ☐ 22 500 000 ☐

2. Le prix d'une matière première a augmenté de 150 %. Il a été :

   multiplié par 1,5 ☐ multiplié par 2,5 ☐ multiplié par 1,15 ☐ multiplié par 0,85 ☐

3. Dans les cas suivants, quels sont les taux d'évolution réciproques l'un de l'autre ?

   30 % et – 30 % ☐ 25 % et – 20 % ☐ 150 % et – 50 % ☐ 60 % et – 40 % ☐

4. Le prix du gaz a subi deux évolutions successives : -9 % en novembre 2003 ; $+5{,}2$ % en novembre 2004. Globalement, le prix du gaz a évolué environ de :

   – 3,8 % ☐ 4,1 % ☐ – 4,3 % ☐ 4,3 % ☐

Exercice n° 8 (toutes spécialités).

1. Une entreprise E a réalisé un chiffre d'affaires de 3 200 000 euros en 2004 et un chiffre d'affaires de 3 049 600 euros en 2005.
   (a) Calculer l'indice du chiffre d'affaires en 2005 par rapport au chiffre d'affaires en 2004 (pris comme base 100).
   (b) L'indice du chiffre d'affaires de l'entreprise E en 2006 par rapport au chiffre d'affaires en 2004 (pris comme base 100) est 102. Calculer le chiffre d'affaires de l'entreprise en 2006.
2. Le tableau suivant donne les indices des bénéfices de l'entreprise F de 2000 à 2006, où le bénéfice de l'entreprise en 2000 est pris comme indice de base 100.

année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
indice	100	100,8	97,8	103,1	99	103	102,9

   (a) En quelle année l'entreprise F a-t-elle réalisé le bénéfice le plus important ? Déterminer, sous forme de pourcentage, le taux d'évolution du bénéfice en 2000 à ce bénéfice maximum.

(b) En quelle année l'entreprise F a-t-elle réalisé le bénéfice le plus faible ? Déterminer, sous forme de pourcentage, le taux d'évolution du bénéfice en 2000 à ce bénéfice minimum.

(c) Une entreprise G, qui prend également son bénéfice en 2000 comme indice de base 100, a obtenu en en 2006 l'indice 105. Peut-on en déduire que l'entreprise G a réalisé en 2006 un bénéfice plus important que l'entreprise F ? Justifier la réponse.

Exercice n° 9 (spécialité « 3 heures »).

Pour un achat immobilier, une personne emprunte 50 000 euros à intérêts composés au taux mensuel de 0,4 %.

1. Dans cette question, le remboursement s'effectue en 60 mensualités égales.

   (a) Le montant de chaque mensualité est de 938,99 euros. Calculer le montant total des intérêts pour ce prêt.

   (b) Voici un extrait du tableau d'amortissement, établi à l'aide d'un tableur et fourni par la banque pour les 12 premières mensualités :

	A	B	C	D	E	F
1	Capital emprunté : 50 000 €			Taux mensuel : 0,4 %		
2						
3	n° de la mensualité	Capital restant dû en début de mois	Montant de la mensualité en euros	Montant des intérêts	Capital amorti en euros	Capital restant dû en fin de mois
4	1	50 000,00	938,99	200,00	738,99	49 261,01
5	2	49 261,01	938,99	197,04	741,95	48 519,06
6	3	48 519,06	938,99	194,08	744,91	47 774,15
7	4	47 774,15	938,99	191,10	747,89	47 026,26
8	5	47 026,26	938,99	188,11	750,88	46 275,37
9	6	46 275,37	938,99	185,10	753,89	45 521,48
10	7	45 521,48	938,99	182,09	756,90	44 764,58
11	8	44 764,58	938,99	179,06	759,93	44 004,65
12	9	44 004,65	938,99	176,02	762,97	43 241,68
13	10	43 241,68	938,99	172,97	766,02	42 475,65
14	11	42 475,65	938,99	169,90	769,09	41 706,57
15	12	41 706,57	938,99	166,83	772,16	40 934,40

   Donner des formules, à recopier vers le bas, à entrer dans chacune des cellules D4, E4 et F4 pour obtenir les colonnes D, E et F.

2. Dans cette question, le remboursement s'effectue en n mensualités égales. On admet que le montant A de chaque mensualité est donné par $A = \dfrac{200}{1-(1{,}004)^{-n}}$.

   (a) Calculer le montant d'une mensualité, si le remboursement s'effectue en 120 mensualités (on donnera la valeur décimale arrondie au centime d'euro).

   (b) L'emprunteur estime que le montant de ses mensualités doit être inférieur ou égal à 460 euros. Quel est le nombre minimum de mensualités nécessaires au remboursement de l'emprunt ? Quel serait alors le montant de chaque mensualité ?

Exercice n° 10 (toutes spécialités).

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du montant horaire brut du SMIC (Salaire minimum interprofessionnel de croissance) en France du 1er juillet 2000 au 1er juillet 2005.

	Smic horaire brut en euros
1er juillet 2000	6,41
1er juillet 2001	6,67
1er juillet 2002	6,83
1er juillet 2003	7,19
1er juillet 2004	7,61
1er juillet 2005	8,03

SOURCE : (INSEE : TEF 2005-2006)

1. Quel était le Smic horaire brut au 1er juillet 1999 sachant qu'il a augmenté entre le 1er juillet 1999 et le 1er juillet 2000 de 3,2 % ?
2. On construit un tableau d'indices en prenant comme base 100 le 1er juillet 2000.
   (a) Recopier, puis compléter l'extrait de feuille de calcul ci-dessous. Donner des valeurs décimales arrondies au dixième.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Date	1/07/00	1 /07/01	1/07/02	1/07/03	1/07/04	1/07/05
2	Smic horaire brut	6,41	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03
3	Indices	100					125,3

   (b) Quelle formule, à recopier sur la plage D3:G3, peut-on entrer dans la cellule C3 ?
   (c) Déterminer le taux d'évolution du Smic horaire brut entre le 1er juillet 2000 et le 1er juillet 2005.
3. Si la croissance relative du Smic horaire brut avait été constante entre le 1er juillet 2000 et le 1er juillet 2005, quel aurait été le taux d'évolution annuel moyen du Smic horaire brut pour obtenir le même niveau au 1er juillet 2005 ?

Exercice n° 11 (toutes spécialités).

Une étude d'implantation du nombre d'ordinateurs dans une commune a permis de constater qu'en 1995 il y avait 1203 ordinateurs et qu'en 2005 on en dénombrait 3120.

1. Déterminer le taux d'évolution du nombre d'ordinateurs de 1995 à 2005 dans cette commune.
2. Déterminer le taux d'évolution annuel moyen du nombre d'ordinateurs de 1995 à 2005 dans cette commune.
3. Sur la période 1995–2000 le taux d'évolution annuel moyen était de 1,07 pour cette commune. Déterminer le taux d'évolution annuel moyen pour la période 2000–2005.

Exercice n° 12 (spécialité « 3 heures »).

Le marché de l'immobilier fait apparaître que les prix des biens, en général, ont augmenté de 44 % en deux ans (pour la période du 1^er^ janvier 2004 au 1^er^ janvier 2006).

1. Déterminer le taux d'évolution annuel moyen du prix des biens immobiliers pour la période du 1er janvier 2004 au 1er janvier 2006.
2. M. Picsou achète un appartement au prix P de 260 400 euros, le 1er janvier 2004.
   (a) Deux années plus tard, M. Picsou décide de mettre en vente cet appartement. Quel devrait être le prix de vente Q d'après le marché ?
   (b) M. Picsou est parvenu à vendre son appartement, le 1er janvier 2006, au prix R de 380 184 euros. Quel taux d'évolution a-t-il été appliqué au prix d'achat P ? On donnera le résultat arrondi à 0,1 %.
   (c) Quel est, dans ce cas, le rapport entre le prix effectif de vente R et le prix théorique Q du marché ?
3. Certains spécialistes du marché de l'immobilier font en 2005 les estimations suivantes : entre le 1er janvier 2006 et le 1er janvier 2007 les prix des biens pourraient chuter de 10 % ; entre le 1er janvier 2007 et le 1er janvier 2008 le taux d'évolution à la baisse serait de t.
   (a) Si le prix de vente, estimé par le marché, de cet appartement, le 1er janvier 2008, était de 290 840 euros, quel serait, dans ce cas, le taux t ? (Les calculs seront réalisés en utilisant le prix effectif de vente au 1er janvier 2006).
   (b) Si M. Picsou avait décidé de placer sur un livret d'épargne ses 260 400 euros, le 1er janvier 2004, à intérêts composés au taux annuel 1,6 %, au bout de combien d'années son capital aurait-il dépassé 290 840 euros ? On pourra noter $u_0 = 260\ 400$ et u_n la valeur du capital le 1er janvier de l'année $2004 + n$.

Exercice n° 13 (spécialité « 3 heures »).

Cet exercice comporte deux annexes.

Un menuisier fabrique des armoires et des buffets.

Il dispose pour cela d'au maximum 40 heures par semaine et d'au maximum 25 lots de planches par semaine.

Pour fabriquer une armoire, il faut 3 heures de travail et 3 lots de planches, pour fabriquer un buffet il faut 5 heures et 2 lots de planches. Soit x le nombre d'armoires fabriquées et y celui de buffets fabriqués par semaine.

On admet que les nombres x et y doivent vérifier le système (S) suivant, avec x et y entiers :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+5y & \leqslant & 40 \\ 3x+2y & \leqslant & 25 \\ x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

1. (a) On a représenté sur le graphique fourni en **annexe 1** les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives : $y = -\frac{3}{5}x + 8$ et $y = -\frac{3}{2}x + \frac{25}{2}$.
   En transformant les deux premières inéquations du système, montrer que ces droites permettent la résolution graphique du système (S). Résoudre alors graphiquement le système (S). (On hachurera les zones du plan qui ne conviennent pas).

(b) À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :
– le menuisier peut-il fabriquer 3 armoires et 6 buffets ?
– le menuisier fabrique 5 armoires ; combien peut-il fabriquer de buffets au maximum ?

2. Une armoire est vendue 200 euros, un buffet 280 euros. On suppose que toute la production est vendue.

   (a) Exprimer en fonction de x et y le chiffre d'affaires R du menuisier.

   (b) Le menuisier utilise un tableur pour déterminer le couple (x, y) qui lui fournira ce chiffre d'affaires maximum. On suppose que toute sa production est vendue. On donne en **annexe 2** la feuille de calcul du menuisier. Par exemple, la cellule E6 donne le chiffre d'affaires correspondant à la vente de 2 armoires et 3 buffets. Pour remplir son tableau, le menuisier a rentré les prix de vente dans les cellules B1 et F1, puis a rentré une formule dans la cellule B4 et a effectué un « copier-glisser » dans les autres cellules du tableau.

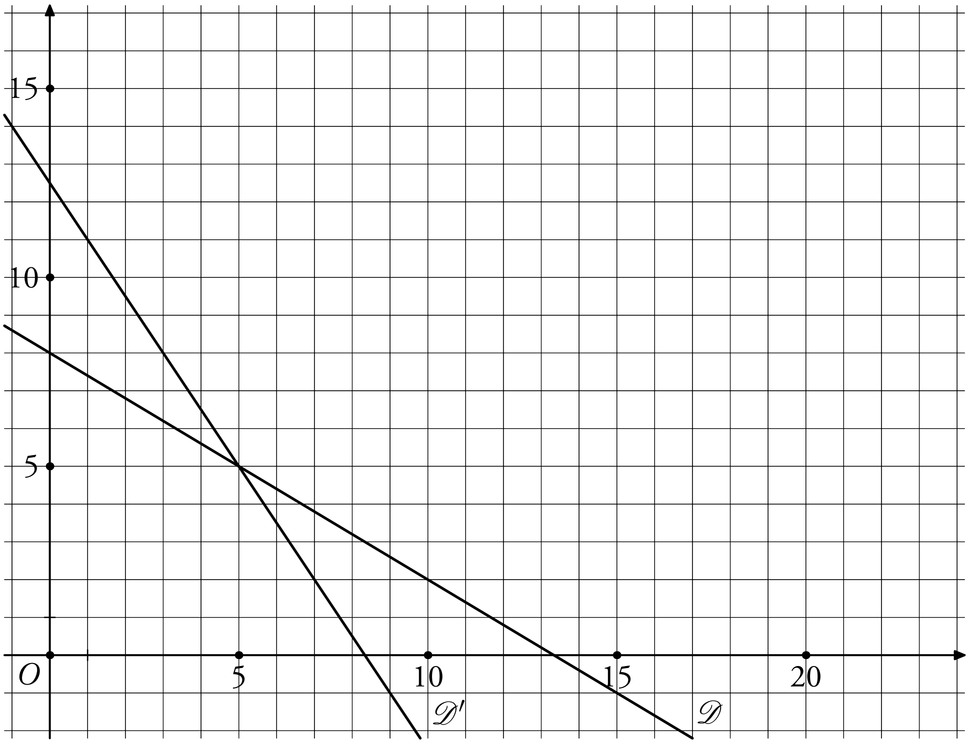
   Donner une formule possible rentrée par le menuisier en B4.

   (c) Dans le tableau, certaines cellules correspondent à des valeurs de x et y que le menuisier ne peut pas produire simultanément (par exemple, il ne peut pas produire 8 armoires et 7 buffets). Barrer les cellules correspondant aux valeurs de x et y que le menuisier ne peut pas produire.

   (d) En déduire le chiffre d'affaires maximum possible, et indiquer les valeurs de x et y correspondantes.

3. Le menuisier veut savoir s'il peut espérer un meilleur chiffre d'affaires avec un prix de 260 euros pour l'armoire et 220 euros pour le buffet. Peut-il modifier rapidement sa feuille de calcul pour obtenir la réponse ? Si oui, donner la ou les modifications.

Annexe 1



Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$

Annexe 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Prix d'une armoire :	200	Prix d'un buffet :			280					
2											
3	y x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
4	0	0	280	560	840	1120	1400	1680	1960	2240	
5	1	200	480	760	1040	1320	1600	1880	2160	2440	
6	2	400	680	960	1240	1520	1800	2080	2360	2640	
7	3	600	880	1160	1440	1720	2000	2280	2560	2840	
8	4	800	1080	1360	1640	1920	2200	2480	2760	3040	
9	5	1000	1280	1560	1840	2120	2400	2680	2960	3240	
10	6	1200	1480	1760	2040	2320	2600	2880	3160	3440	
11	7	1400	1680	1960	2240	2520	2800	3080	3360	3640	
12	8	1600	1880	2160	2440	2720	3000	3280	3560	3840	

x est le nombre d'armoires fabriquées, y le nombre de buffets fabriqués.

Exercice n° 14 (toutes spécialités).

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte.
On demande de cocher celle que vous pensez être correcte.

A et B sont deux événements indépendants. On donne $p(A) = \frac{1}{3}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{18}$.

1. $p(\overline{A})$ est égal à	☐ $\frac{17}{18}$	☐ $\frac{1}{6}$	☐ $\frac{2}{3}$
2. $p_A(B)$ est égal à	☐ $\frac{1}{18}$	☐ $\frac{1}{6}$	☐ $\frac{1}{3}$
3. A et B sont incompatibles	☐ Oui	☐ Non	☐ On ne peut pas conclure.
4. $p(B)$ est égal à	☐ $\frac{5}{18}$	☐ $\frac{1}{6}$	☐ $\frac{1}{3}$
5. $p(A \cup B)$ est égal à	☐ $\frac{4}{9}$	☐ $\frac{1}{2}$	☐ $\frac{17}{18}$

Exercice n° 15 (toutes spécialités).

Dans cet exercice, on demande les valeurs exactes des probabilités.

Une entreprise fabrique des systèmes d'alarme pour les piscines.

Deux ateliers, notés 1 et 2, d'un site de production de l'entreprise, fabriquent chaque jour respectivement 500 et 2 000 exemplaires d'un même modèle de système d'alarme pour les piscines.

Un jour donné, 2 % des systèmes produits par l'atelier 1 et 1 % des systèmes produits par l'atelier 2, sont défectueux.

On prélève au hasard un système parmi les 2 500 systèmes produits par les deux ateliers ce jour là. Tous les systèmes ont la même probabilité d'être choisis.

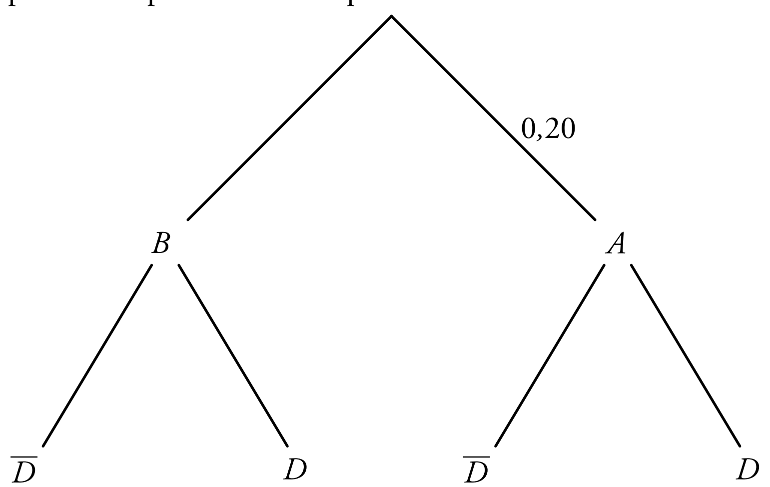
On considère les événements suivants :

A : « le système prélevé provient de l'atelier 1 » ;

B : « le système prélevé provient de l'atelier 2 » ;

D : « le système prélevé est défectueux ».

1. Donner grâce à l'énoncé les probabilités conditionnelles $P_A(D)$ et $P_B(D)$.
2. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



3. Calculer la probabilité que le système ne soit pas défectueux.
4. Calculer la probabilité que, sachant qu'il est défectueux, le système provienne de l'atelier 1.

Exercice n° 16 (toutes spécialités).

Le chef du rayon électroménager d'un grand magasin dispose du tableau ci-dessous qui donne, en milliers d'euros, les chiffres d'affaires mensuels de son rayon pour les années 2003, 2004 et 2005.

Mois	Année 2003 (Série S1)	Année 2004 (Série S2)	Année 2005 (Série S3)
Janvier	330	380	415
Février	450	485	510
Mars	645	660	700
Avril	795	810	845
Mai	975	960	990
Juin	1125	1125	1150
Juillet	330	360	390
Août	285	270	385
Septembre	420	470	525
Octobre	540	615	670
Novembre	1155	1125	1090
Décembre	1740	1610	1370
Moyenne		739	753
Écart type		383	319

1. (a) Quelle proportion le chiffre d'affaires de décembre 2005 représente-t-il par rapport au chiffre d'affaires total de l'année 2005 ?
   (b) On suppose que cette proportion reste inchangée en 2006. On pense que le chiffre d'affaires de 2006 sera de 10 millions d'euros.
   Quel sera, sous ces hypothèses, le chiffre d'affaires de décembre 2006 ?
2. (a) Calculer, à l'aide de la calculatrice, la moyenne et l'écart type de la série statistique S1. On donnera la valeur arrondie à l'unité.
   (b) Quel commentaire vous suggère l'évolution, sur les années 2003, 2004 et 2005, des chiffres d'affaires moyens et celle des écarts types des séries statistiques S1, S2 et S3 ?

Exercice n° 17 (toutes spécialités).

Activité d'une entreprise

La feuille de calcul ci-dessous donne les montants en euros des différentes factures établies par une entreprise artisanale au cours de l'année 2003, le montant moyen et l'écart type.

Les montants sont classés par ordre croissant.

	A	B	C	D	E	F
1	Rang	Montant	Rang	Montant	Rang	Montant
2	1	452,78	27	609,51	53	902,72
3	2	453,98	28	619,32	54	945,31
4	3	456,75	29	634,86	55	954,76
5	4	457,89	30	641,82	56	965,25
6	5	470,56	31	646,82	57	967,34
7	6	474,31	32	648,75	58	968,36
8	7	475,98	33	651,28	59	999,45
9	8	487,56	34	664,80	60	1038,34
10	9	489,65	35	672,87	61	1052,84
11	10	492,73	36	675,35	62	1073,25
12	11	493,54	37	676,32	63	1082,65
13	12	495,67	38	678,32	64	1085,47
14	13	519,32	39	678,42	65	1163,42
15	14	534,86	40	678,81	66	1181,75
16	15	541,82	41	738,27	67	1212,67
17	16	546,82	42	746,24	68	1220,56
18	17	548,75	43	749,43	69	1223,32
19	18	564,80	44	753,12	70	1277,33
20	19	576,32	45	763,90	71	1296,54
21	20	583,72	46	765,31	72	1298,72
22	21	590,43	47	812,56	73	1356,98
23	22	591,74	48	812,74	74	1367,92
24	23	592,73	49	834,32	75	1398,75
25	24	593,54	50	835,12	76	1412,75
26	25	596,87	51	865,91	77	3612,45
27	26	600,64	52	875,81		
28						
29		Montant moyen :		824,32		
30		Ecart type :		420,87		

1. On considère la série statistique des montants consignés dans la feuille de calcul ci-dessus.
   (a) Donner la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de cette série statistique.
   (b) Construire un diagramme en boîte résumant cette série statistique en prenant pour valeurs extrêmes le minimum et le maximum. Placer le montant moyen sur ce diagramme.
   (c) Il y a une différence entre le montant moyen et la médiane. Donner une explication possible.
2. Le tableau ci-dessous donne pour les trois années 2003, 2004 et 2005 le nombre de factures établies par l'entreprise, le montant moyen et l'écart type.

	A	B	C	D
1	Année	2003	2004	2005
2	Nombre de factures établies	77	89	103
3	Montant moyen	824,32	768,67	725,01
4	Ecart type	420,87	248,32	173,65

   Le chiffre d'affaires annuel de cette entreprise artisanale est le montant total des factures établies sur l'année. Le profit réalisé par cette entreprise est égal à 18,0 % de son chiffre d'affaires en 2003, 16,7 % en 2004 et 15,3% en 2005. Calculer les chiffres d'affaires et les profits de chacune des années 2003, 2004 et 2005.
3. Commenter l'évolution de l'activité de cette entreprise artisanale.

Exercice n° 18 (toutes spécialités).

Un assembleur d'ordinateurs a équipé chacun d'eux d'une carte mère de marque, soit Élite, soit Futura. 35 % des ordinateurs sont équipés de cartes mères Élite. Il a aussi muni chacun d'eux d'un processeur choisi parmi trois références : Premium, P20, et P30.

- 60 % des ordinateurs équipés de cartes mères Élite sont munis d'un processeur Premium et 30 % d'un processeur P20.
- 30 % des ordinateurs équipés de cartes mères Futura sont munis d'un processeur Premium et 20 % d'un processeur P20.

On teste au hasard un ordinateur chez cet assembleur : tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être testés.

On considère les événements suivants :

E : L'ordinateur est équipé d'une carte mère Élite ;
F : l'ordinateur est équipé d'une carte mère Futura ;
P_1 : l'ordinateur est équipé d'un processeur Premium ;
P_2 : l'ordinateur est équipé d'un processeur P20 ;
P_3 : l'ordinateur est équipé d'un processeur P30.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

Dans les questions suivantes, les résultats des calculs seront arrondis au centième.

2. (a) Déterminer la probabilité de l'événement $F \cap P_1$.
   (b) Déterminer la probabilité de l'événement P_1.
   (c) On teste au hasard un ordinateur équipé du processeur Premium. Quelle est la probabilité qu'il soit muni de la carte mère Futura ?
3. Les événements E et P_1 sont-ils indépendants ?

Exercice n° 19 (toutes spécialités).

Une entreprise propose un test de détection à distance d'une certaine panne de réseau informatique. Ce test présente les caractéristiques suivantes :

- La probabilité qu'un réseau atteint de la panne ait un test positif est de 0,95.
- La probabilité qu'un qu'un réseau non atteint de la panne ait un test négatif est aussi de 0,95.

On choisit un réseau au hasard et on note :

- M l'événement « le réseau choisi présente la panne » et $\overline{M}$ l'événement contraire.
- T l'événement « le test effectué sur le réseau est positif » et $\overline{T}$ l'événement contraire.

L'objectif de l'exercice est l'étude de la « valeur prédictive du test » dans deux types de population de réseaux.

1. On fait une recherche systématique de la panne dans une première population de réseaux. On sait que la proportion de réseaux de cette population atteints de la panne est 0,001 (autrement dit 1 réseau sur 1000 est atteint de cette panne).
   (a) Réaliser un arbre pondéré décrivant cette situation.

   (b) Calculer la probabilité $P(T)$.
   (c) Calculer la probabilité $P_T(M)$ qu'un réseau présentant un test positif soit atteint de la panne. Ce nombre $P_T(M)$ représente la valeur prédictive du test.
2. Dans cette question, on fait une recherche systématique de la panne dans une seconde population de réseaux, qualifiée de population à risque. On sait que la proportion de réseaux de cette population atteints de la panne est 0,25. Calculer, pour cette population, la valeur prédictive du test $P_T(M)$.

Prolongement possible en classe

3. On considère une troisième population de réseaux et l'on note x la proportion de réseaux de cette population atteints de la panne. Déterminer en fonction de x la valeur prédictive du test pour cette population. Pour quelle valeur de x un réseau, dont le test est positif, a-t-il une chance sur deux d'être atteint de la panne ?

Exercice n° 20 (toutes spécialités).

Dans une petite entreprise, la fabrication journalière de x litres d'un certain produit chimique impose un coût de fabrication, en euros, noté $f(x)$.

Ce produit étant revendu au prix de 7,5 euros par litre, le chiffre d'affaires, en euros, réalisé par l'entreprise, pour la vente de x litres de ce produit est donc le nombre réel $g(x) = 7{,}5x$.

Partie A

En annexe, on a tracé la courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal ; le volume en litres de produit fabriqué est porté en abscisses, et le coût de fabrication en euros est porté en ordonnées.

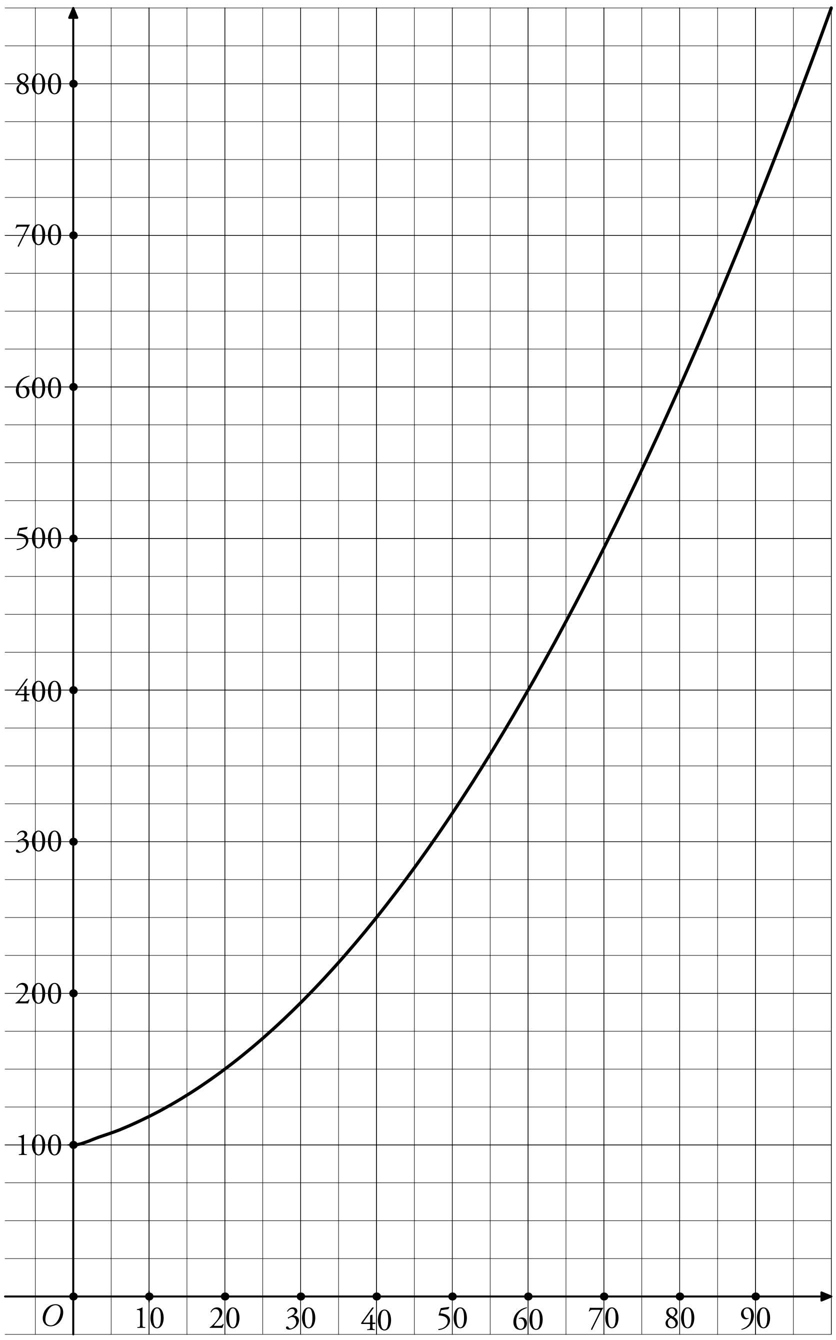
1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
   (a) Quel est le coût de fabrication pour une production journalière de 40 litres ? De 90 litres ?
   (b) Quelle production journalière correspond à un coût de fabrication de 525 euros ?
   (c) Quelle est la production journalière maximale pour que le coût de fabrication n'excède pas 400 euros ?
2. Dans le repère précédent, tracer la droite d'équation $y = 7{,}5x$ et déterminer graphiquement combien l'entreprise doit fabriquer d'unités pour être bénéficiaire.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle [0, 100] par la relation $f(x) = 0{,}0625x^2 + 1{,}25x + 100$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [0, 100],
   $g(x) - f(x) = 56{,}25 - 0{,}0625(x - 50)^2$.
2. En déduire le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser, en précisant la production journalière correspondante.

Annexe

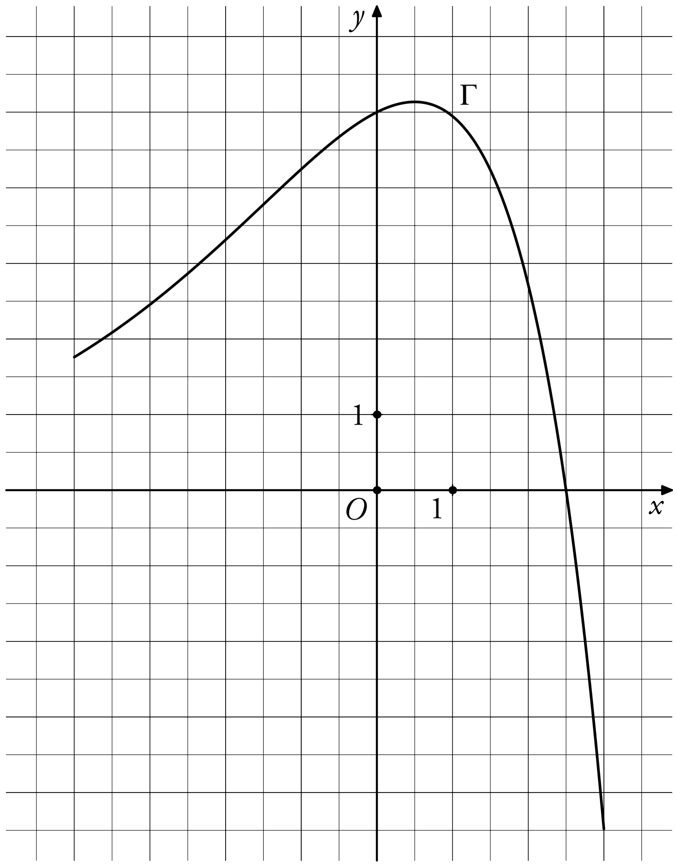


Exercice n° 21 (toutes spécialités).

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4, 3]$, et l'on note f' la fonction dérivée de f.

La courbe représentative de f est la courbe Γ donnée ci-dessous.

On admet que la courbe Γ possède les propriétés suivantes :
– La courbe Γ passe par le point $A(0, 5)$;
– la tangente en A à la courbe Γ passe par le point $B(-2, 4)$;
– la courbe Γ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 0,5.
En outre, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-4 ; 0{,}5]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0{,}5 ; 3]$.



1. Placer les points A et B et tracer la tangente en A à la courbe Γ.

2. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$, et donner pour chaque solution un encadrement par deux entiers consécutifs.

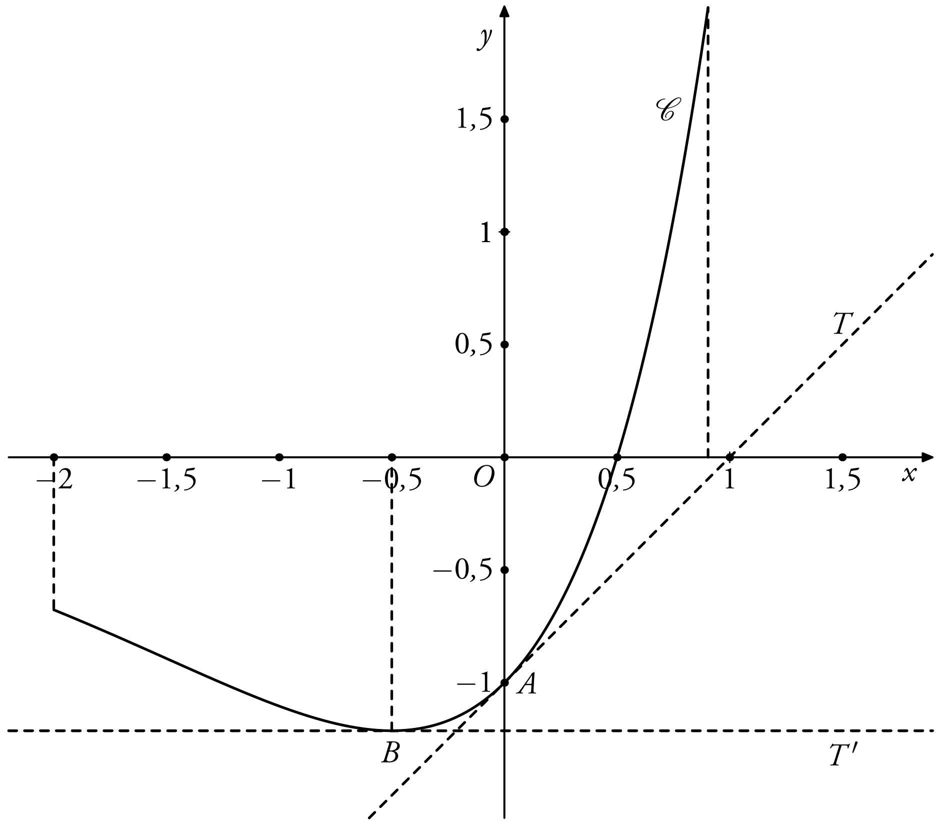
3. (a) Donner $f'(0)$ (aucune justification n'est demandée).

   (b) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$. Justifier votre réponse.

   (c) Résoudre l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$.

Exercice n° 22 (toutes spécialités).

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 0,9]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est la suivante :



Le point A a pour coordonnées $(0, -1)$ et le point B a pour coordonnées $(-0,5\ ; -1,2)$.

La courbe $\mathscr{C}$ admet pour tangentes au point A la droite T et au point B la droite T'. La droite T' est parallèle à l'axe des abscisses.

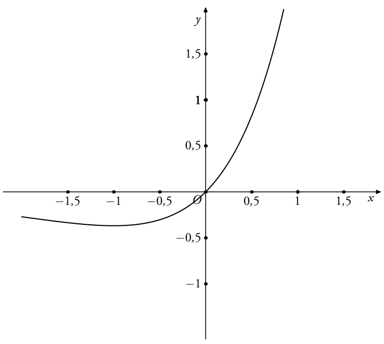
La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-2\ ; -0,5]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[-0,5\ ; 0,9]$.

1. Donner sans justification l'équation réduite de la droite T en utilisant les données du graphique.
2. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$. Expliquer la méthode employée.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

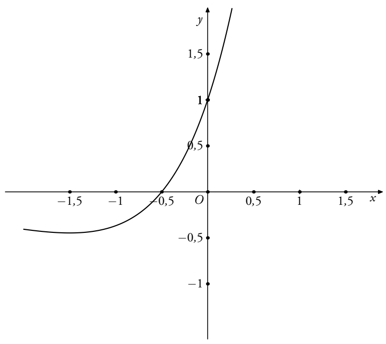
   (a) Lire graphiquement les valeurs suivantes : $f(0)$, $f'(0)$, $f'(-0,5)$.

   (b) Donner, sans justification, le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2\ ; 0,9]$.

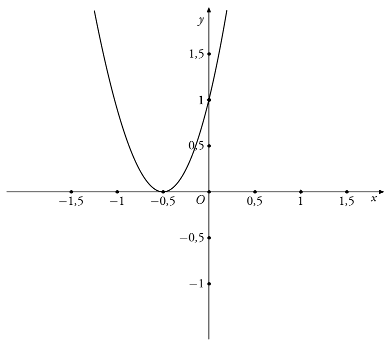
4. Parmi les courbes suivantes indiquer celle qui représente la fonction dérivée f'. Justifier.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Exercice n° 23 (spécialité « 3 heures »).

Une étude de marché s'intéresse à l'évolution de l'offre et de la demande d'un composant électronique, en fonction du prix unitaire x exprimé en milliers d'euros.

On modélise les nombres de milliers de composants électroniques offerts et demandés, respectivement, par les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0, 5]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,5x} - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{8}{\mathrm{e}^{0,5x} + 1}$$

La courbe représentative de la fonction g est tracée sur le graphique fourni en annexe.

A. Étude de la fonction « offre ».

1. Calculer $f(0)$.
2. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0, 5]$.
3. Tracer la courbe représentative de f sur le graphique fourni en annexe.

B. Détermination du prix d'équilibre

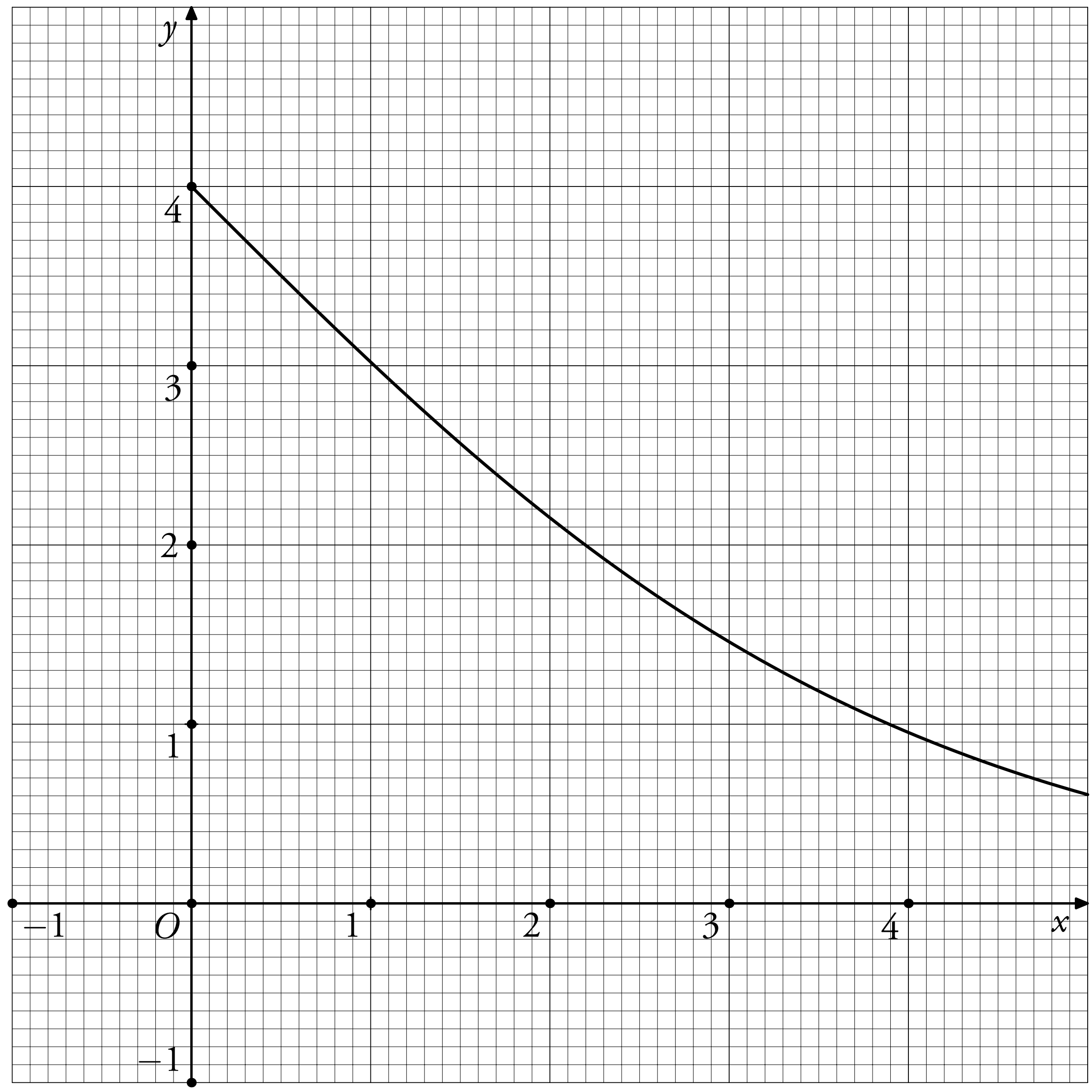
On appelle prix d'équilibre d'un produit, le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée à 0,1 millier d'euros près du prix d'équilibre de ce produit.
2. (a) Déterminer par un calcul la valeur exacte du prix d'équilibre, puis en donner l'arrondi à 1 euro.

   (b) Calculer la valeur exacte de l'offre au prix d'équilibre.
3. On rappelle que le chiffre d'affaires réalisé pour q objets vendus au prix unitaire p est égal au produit $p \times q$.

   On se place au prix d'équilibre. Quel est alors le chiffre d'affaires réalisé par les fabricants ? On arrondira le résultat à 1 euro.

Annexe



Exercice n$^\circ$ 24 (toutes spécialités).

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte.
On demande de cocher celle que vous pensez être correcte.

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-12, 20]$:

Valeurs de x	-12		-5		7		20
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	7	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-6

1. On peut dire que :

☐ f est positive sur l'intervalle $[-12, -5]$ ☐ f est positive sur l'intervalle $[7, 20]$ ☐ f est négative sur l'intervalle $[-5, 20]$

2. L'équation $f(x) = 2$ possède :

   ☐ une unique solution ☐ aucune solution ☐ On ne peut pas répondre.

3. On cherche à comparer $f(0)$ et $f(8)$:

   ☐ $f(0) < f(8)$ ☐ $f(0) > f(8)$ ☐ On ne peut pas répondre.

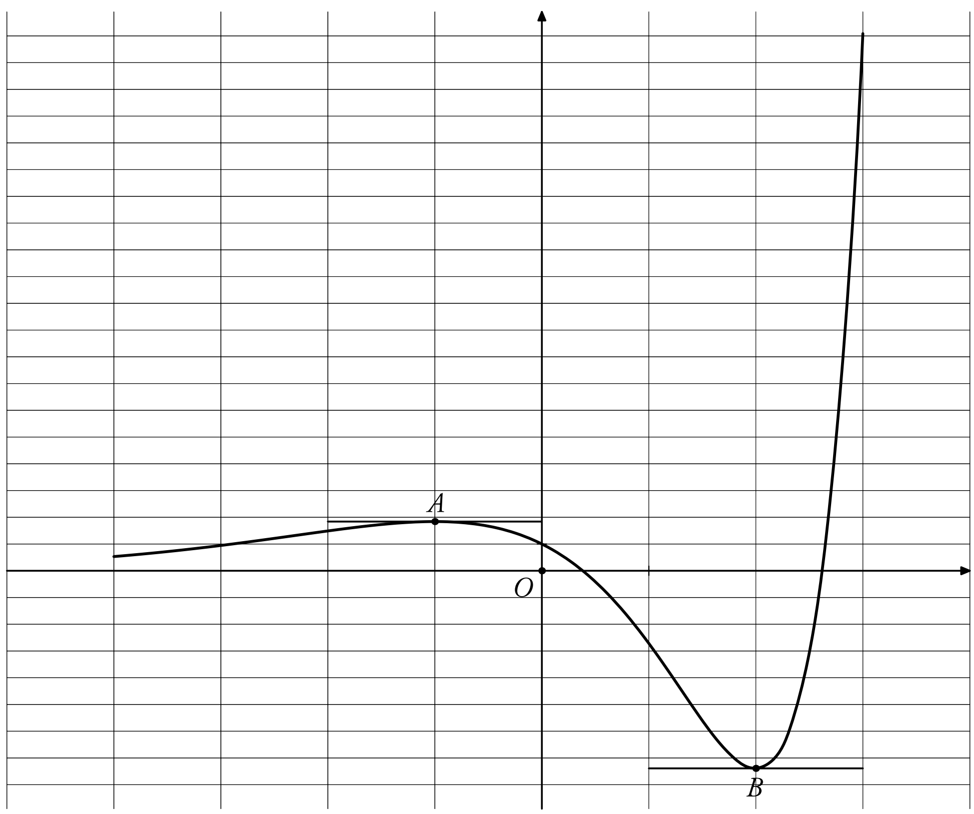
4. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 20 est :

   ☐ $y = 20x - 6$ ☐ $y = -x - 6$ ☐ $y = -x + 14$

Exercice n° 25 (toutes spécialités).

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte.
On demande de cocher celle que vous pensez être correcte.

Le graphique ci-dessous représente la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4, 3]$. La fonction dérivée de f est notée f'. Cette courbe $\mathscr{C}$ admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points A et B d'abscisses respectives -1 et 2 qui sont représentées sur le graphique. La fonction f' ne s'annule qu'en -1 et 2.



À partir de ce graphique, compléter le QCM suivant en entourant les bonnes réponses.

Question	Réponse a	Réponse b	Réponse c
Que dire du signe de $f(x)$?	pour tout x de $[-4, 3]$ $f(x) > 0$	f change de signe sur $[-4, 3]$	pour tout x de $[-4, 3]$ $f(x) < 0$
Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ admet-elle ?	deux solutions	une solution	aucune solution
Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[-1, 2]$?	f est décroissante sur $[-1, 2]$	f est croissante sur $[-1, 2]$	f n'est ni décroissante ni croissante sur $[-1, 2]$
Quel est le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]2, 3]$?	pour tout x de $]2, 3]$ $f'(x) \geqslant 0$	f' change de signe sur $[2, 3]$	pour tout x de $]2, 3]$ $f'(x) \leqslant 0$

Exercice n° 26 (spécialité « 3 heures »).

Partie A

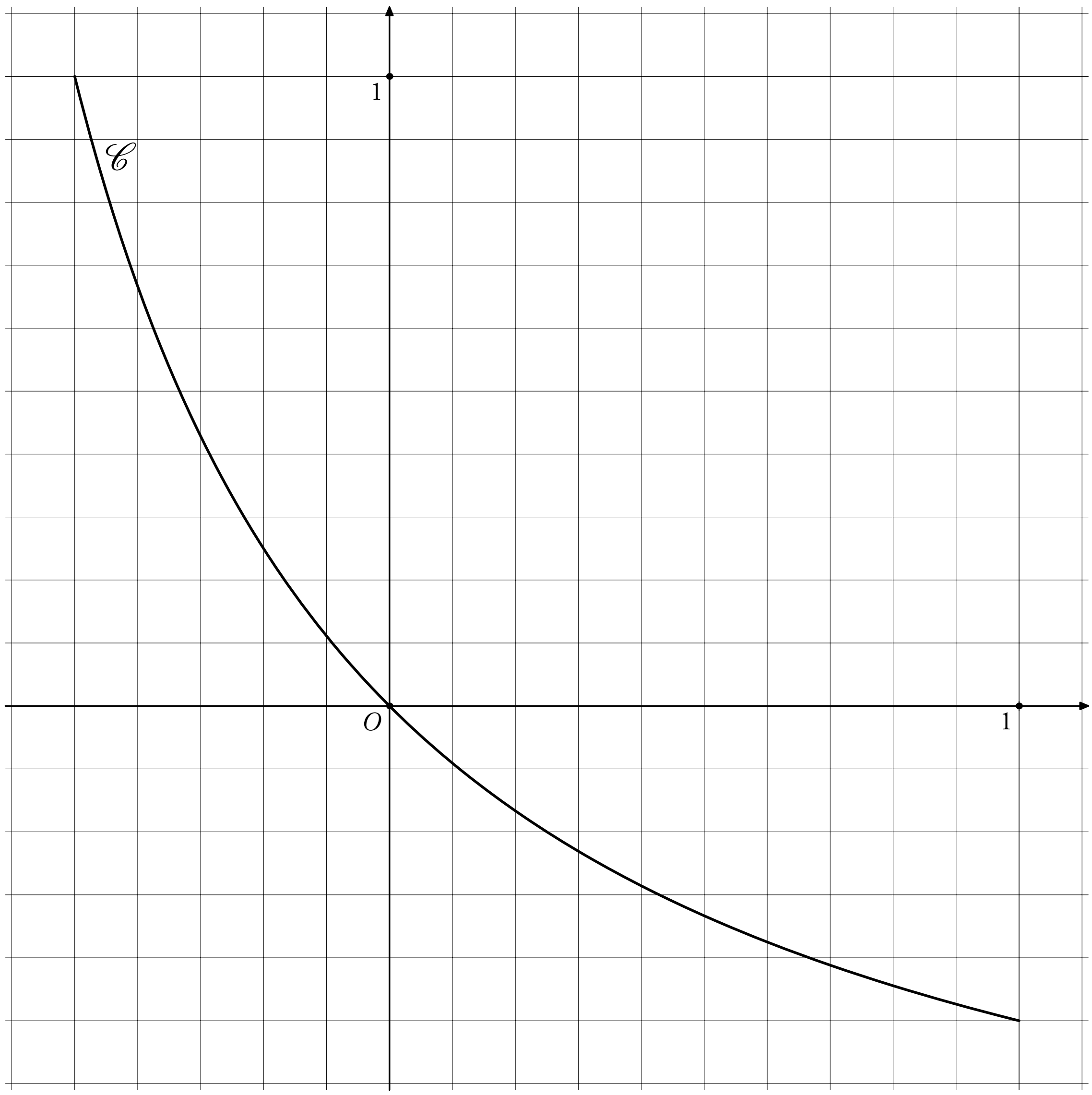
1. Le prix d'un article est de 120 euros. Ce prix subit une première évolution au taux de 25 %, puis une seconde évolution qui le ramène à sa valeur initiale. Quel est le taux de la deuxième évolution ?
2. Le prix d'un article est de 120 euros. Ce prix subit une première évolution au taux de −20 %, puis une seconde évolution qui le ramène à sa valeur initiale. Quel est le taux de la deuxième évolution ?

Partie B

D'une façon générale, un prix P subit deux évolutions successives, la première à un taux de x, et la deuxième à un taux de y. Il revient alors à sa valeur initiale P.

1. Montrer que x et y vérifient : $(1 + x)(1 + y) = 1$.
   On admet alors que que $y = -\dfrac{x}{1+x}\cdot$
2. On veut étudier sur l'intervalle $[-0,5\ ; 2]$ la fonction f telle que $f(x) = -\dfrac{x}{1+x}\cdot$ Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
   (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   (b) Déterminer les variations de la fonction f sur sur l'intervalle $[-0,5\ ; 2]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
3. À l'aide de la représentation graphique de la courbe $\mathscr{C}$ donnée en annexe, ou à l'aide d'un calcul, répondre aux questions suivantes :
   (a) Quelle évolution faut-il faire subir à un prix augmenté de 50 % pour retrouver le prix initial ?
   (b) Quelle évolution faut-il faire subir à un prix diminué de 50 % pour retrouver le prix initial ?

Annexe



Exercice n° 27 (spécialité « 3 heures »).

M. Picsou a créé dans son entreprise une nouvelle activité en janvier 2005.

À la fin du mois d'octobre, il décide d'étudier l'évolution de cette activité.

Il demande, alors, au service comptable de lui fournir, mois par mois, le montant des charges supportées par l'entreprise ainsi que le chiffre d'affaires pour cette nouvelle activité.

Celui-ci lui communique le tableau récapitulatif suivant :

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Montant, en €, des charges y_i	5 000	5 150	5 300	5 430	5 570	5 740	5 860	6 000	6 120	6 260
Chiffre d'affaires, en €, z_i	2 300	2 550	2 800	3 000	3 300	3 500	3 900	4 250	4 500	5 000

M. Picsou veut savoir à partir de quel moment il pourra envisager un profit sur cette nouvelle activité.

Partie A : Évolution du montant des charges

Une représentation graphique du nuage de points A_i de coordonnées (x_i, y_i) dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

On décide de réaliser un ajustement affine.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ obtenue par la méthode des moindres carrés : les coefficients seront donnés à l'unité près. La tracer sur le graphique en annexe.
2. En supposant que le modèle reste valable pour les six mois suivants, extrapoler graphiquement le montant des charges pour le mois de mars 2006 (arrondir à la centaine d'euros la plus proche).
3. Retrouver le résultat précédent par un calcul.

Partie B : Évolution du chiffre d'affaires

Le service comptable informe M. Picsou qu'un ajustement du nuage des points B_i de coordonnées (x_i, z_i) relatif au chiffre d'affaires de son entreprise peut être donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[1, 15]$ par $f(x) = 2200\mathrm{e}^{0,08x}$.

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1, 15]$.
2. Reproduire et compléter le tableau suivant (arrondir à la dizaine d'euros) :

x	1	2	6	8	10	12	15
$f(x)$					4 900		

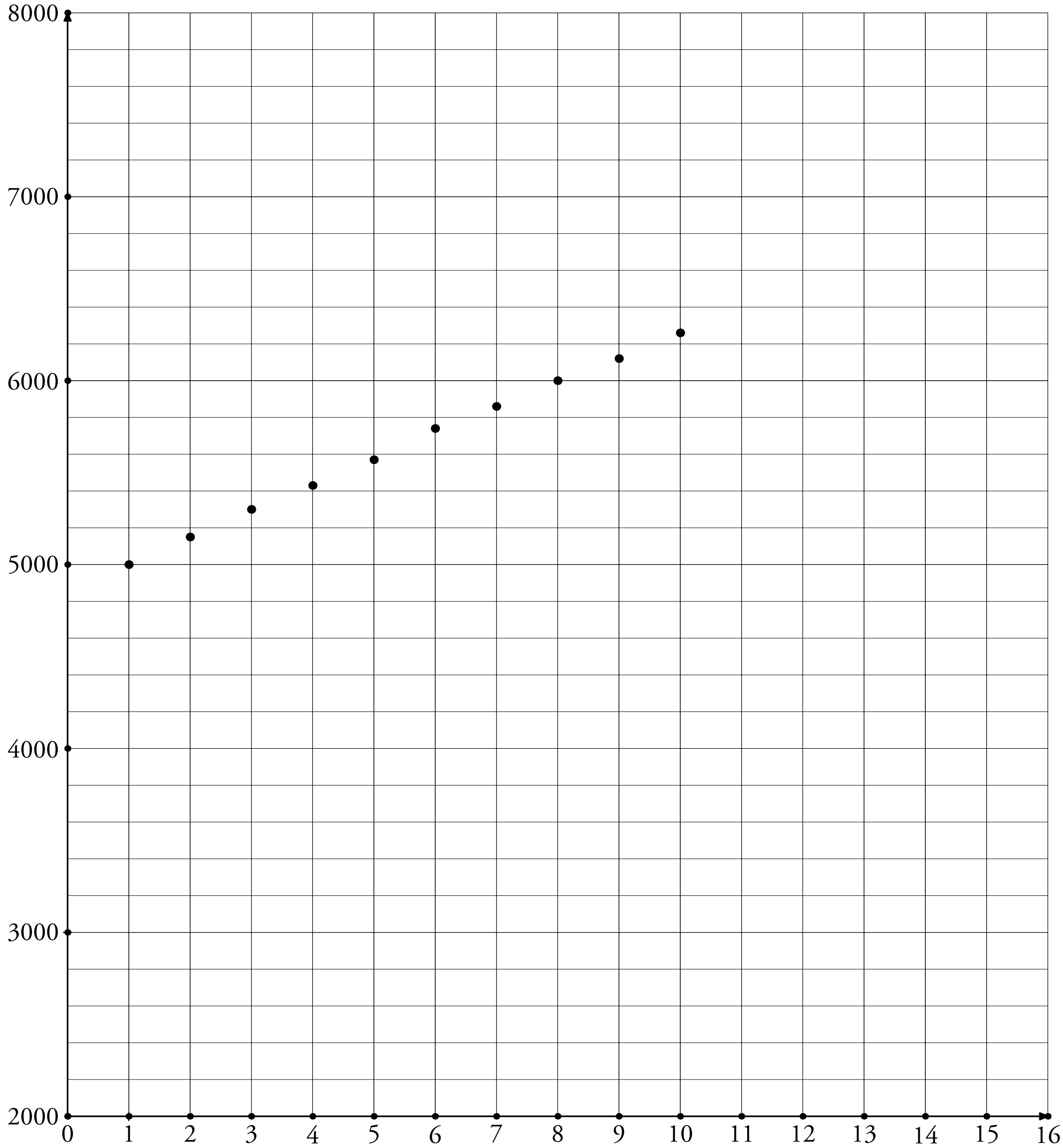
3. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur le graphique en annexe.

Partie C : Conclusion

M. Picsou espérait dégager un profit sur la nouvelle activité à partir du mois de février 2006.

À la lecture du graphique, que va-t-il constater ?

Annexe



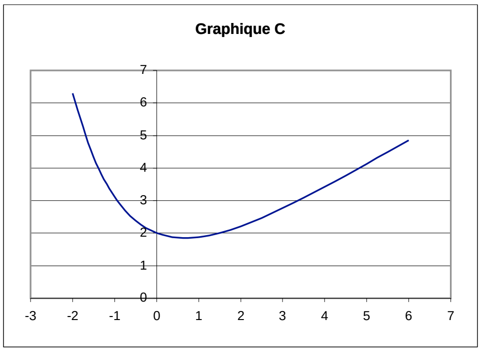
Exercice n° 28 (spécialité « 3 heures »).

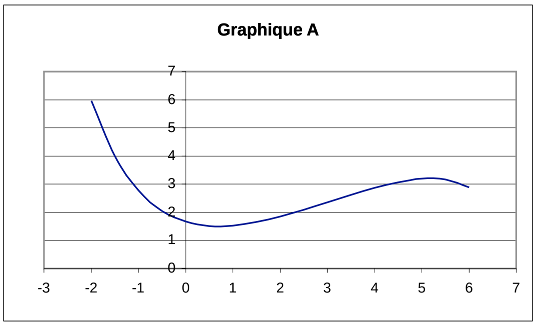
Première partie : Utilisation d'un tableur

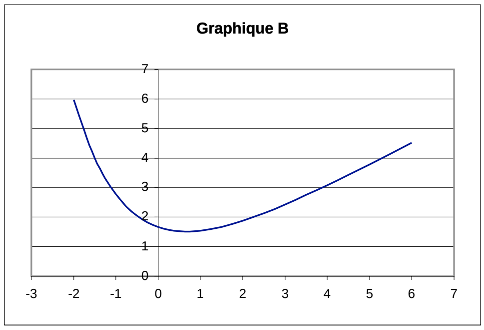
1. Pour une fonction f, définie sur $[-2, 6]$, on a obtenu à l'aide d'un tableur le tableau de valeurs ci-dessous.

   Éliminer parmi les trois graphiques proposés ceux qui ne peuvent pas représenter la fonction, en justifiant votre décision.

x	$f(x)$
-2	5,96331735
-1,5	4,00445800
-1	2,77542149
-0,5	2,04798439
0	1,66529119
0,5	1,51953678
1	1,53662786
1,5	1,66564090
2	1,87157669
2,5	2,13038068
3	2,42552040
3,5	2,74563329
4	3,08290997
4,5	3,43198313
5	3,78916390
5,5	4,15191693
6	4,51849971







2. La fonction précédente est la fonction f définie sur $[-2, 6]$ par $f(x) = 0{,}75x + \mathrm{e}^{-0{,}75x+0{,}51}$

   Pour obtenir un tableau de valeurs à l'aide d'un tableur, on a rempli les cellules A2 à A18 comme indiqué sur l'image ci-contre.

   (a) Indiquer une méthode qui permet d'obtenir les 17 valeurs numériques de x dans la plage A2:A18 sans avoir à les saisir une à une.

   (b) On veut obtenir dans la colonne B les images par f des nombres figurant en colonne A. On saisit en B2 une formule à recopier vers le bas.

   Parmi les formules proposées ci-dessous, choisir la formule qui permet d'obtenir ces images (aucune justification n'est demandée).

   formule 1 : =0,75*(−2) +EXP(-0,75*(−2)+0,51)
   formule 2 : =0,75*A1 +EXP(-0,75*A1+0,51)
   formule 3 : =0,75*A2 +EXP(-0,75*A2+0,51)
   formule 4 : =0,75*A2 +EXP(-0,75*A2+0,51)

	A	B
1	x	$f(x)$
2	-2	
3	-1,5	
4	-1	
5	-0,5	
6	0	
7	0,5	
8	1	
9	1,5	
10	2	
11	2,5	
12	3	
13	3,5	
14	4	
15	4,5	
16	5	
17	5,5	
18	6	

Deuxième partie : Étude mathématique d'un problème économique

Une entreprise fabrique et vend x centaines d'objets, pour des valeurs de x comprises dans l'intervalle $[2, 6]$.

On admet que $f(x)$ exprime, en millions d'euros, le coût de fabrication en fonction du nombre x.

Chaque objet fabriqué est vendu 8 000 euros.

On note $g(x)$ le montant, en millions d'euros, du produit de la vente de x centaines d'objets. On a donc $g(x) = 0{,}8x$.

On suppose dans la suite que toute la production est écoulée, c'est à dire que chaque objet fabriqué est vendu.

1. L'entreprise réalise-t-elle un profit lorsqu'elle fabrique (et vend) deux cents objets ? Six cents objets ?
2. On note $B(x)$ le profit, en millions d'euros, réalisé par l'entreprise pour la production et la vente de x centaines d'objets.
   (a) Démontrer que $B(x) = 0{,}05x - \mathrm{e}^{-0{,}75x+0{,}51}$.
   (b) Calculer $B'(x)$. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[2, 6]$, $B'(x) > 0$.
   (c) Reproduire et compléter le tableau ci-contre puis utiliser ce tableau pour répondre aux questions suivantes :
   Quel est le nombre d'objets minimum (à l'objet près) que l'entreprise doit produire pour être rentable ? Justifier.
   L'entreprise peut-elle espérer réaliser un bénéfice de 300 000 euros ? Justifier.

x	2	6
Signe de $B'(x)$		
Variations de B		

Exercice n° 29* (spécialité « 3 heures »).

Une entreprise fabrique des articles de luxe. Une étude a montré que le coût total de la production noté $C(q)$, exprimé en euros, varie en fonction du nombre q d'articles fabriqués, suivant la relation :

$$C(q) = 0{,}002q^3 - 90q\ln(0{,}01q) + 100q \quad \text{avec} \quad q \geqslant 1.$$

Partie A

Le coût moyen $C_M(q)$ de la production q est défini par $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

Dans cette partie, les coûts seront éventuellement arrondis à l'euro le plus proche.

1. Calculer le coût total de la production de 100 articles, puis le coût moyen d'une telle production.
2. Calculer $C(130)$ et $C(131)$; quel est le coût de production du 131-ième article ?
3. On appelle coût marginal pour une quantité q le coût de production du $q+1$-ième article. On note $C_m(q)$ ce coût marginal. On a donc $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$.
   Calculer le coût marginal pour 150 articles.

Partie B

On modélise le coût moyen par la fonction f définie sur l'intervalle $[30, 200]$ par $f(x) = 0{,}002x^2 - 90\ln(0{,}01x) + 100$; on note f' la dérivée de la fonction f.

1. Calculer $f'(x)$, puis vérifier que $f'(x) = \dfrac{0{,}004\left(x^2 - 22500\right)}{x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[30, 200]$, puis en déduire que f admet un minimum lorsque $x = 150$.
3. En déduire la valeur de q pour laquelle le coût moyen est minimal.
   Donner la valeur décimale arrondie à l'euro le plus proche de ce coût moyen et comparer avec le coût marginal pour 150 articles trouvé dans la partie **A**.

Exercice n° 30⋆ (spécialité « 3 heures »).

Partie A

On considère la fonction f définie, sur l'intervalle $[0\ ;\ 0{,}6]$, par $f(x) = 1 - (1+x)^{-4}$. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère du plan est donnée en annexe.

1. Soit f' la fonction dérivée de f. On admet que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 0{,}6]$, $f'(x) = 4(1+x)^{-5}$.
   (a) Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.
   (b) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point O. Tracer cette tangente sur le graphique de l'annexe.
2. Justifier que f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 0{,}6]$.
3. Tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 3x$ sur le graphique de l'annexe.
4. (a) On admet que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ ont un unique point d'intersection dont l'abscisse α appartient à l'intervalle $]0; 0{,}6]$. Déterminer α avec la précision permise par le graphique de l'annexe.
   (b) L'équation $1-(1+x)^{-4} = 3x$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0\ ; 0{,}6]$. En donner une valeur approchée arrondie au centième. Expliquer la méthode utilisée.

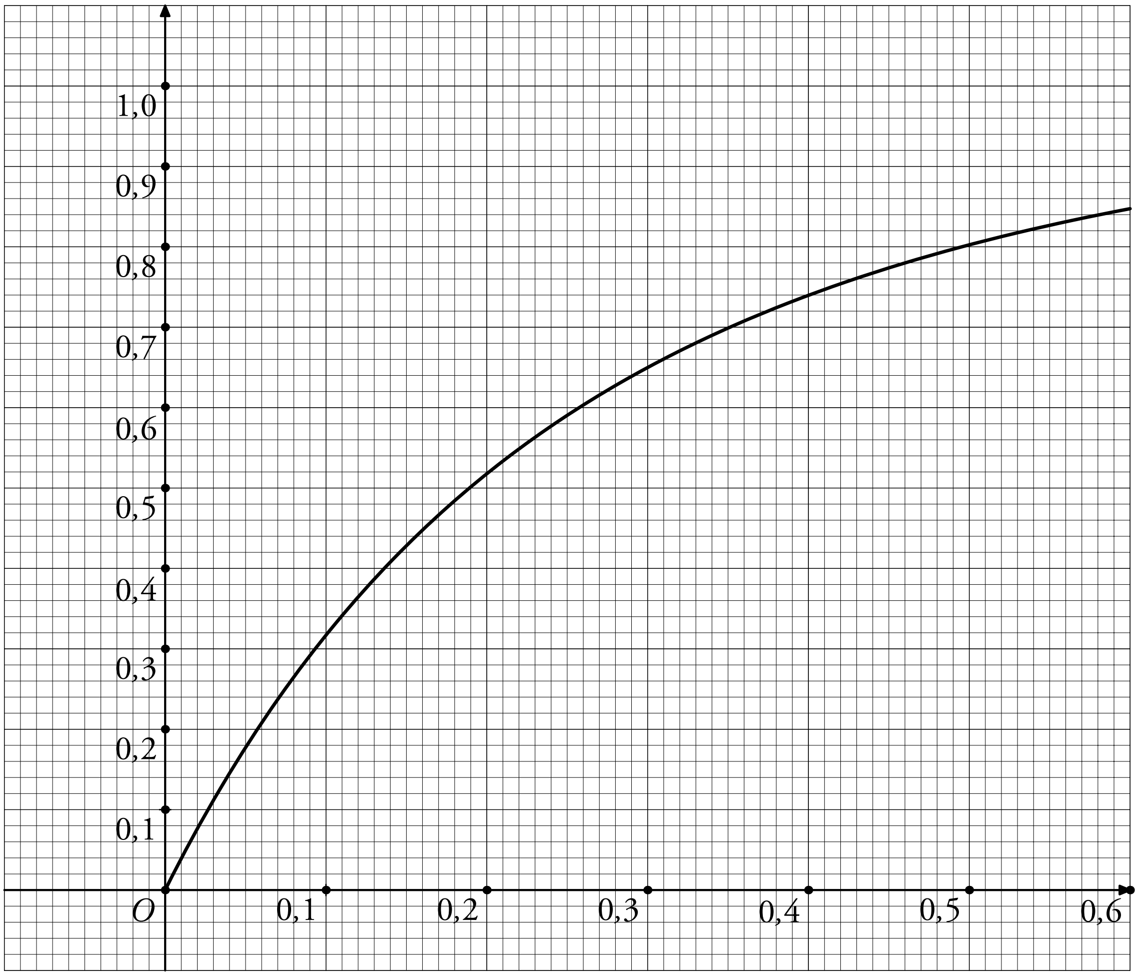
Partie B

Un entrepreneur envisage un projet où il investira 12 000 € et recevra pendant 4 ans à la fin de chaque année un flux de trésorerie de 4 000 €. Pour cela, il étudie la valeur actuelle des quatre flux de trésorerie. Il utilise la formule $a \times \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ qui donne la valeur actualisée d'un flux a reçu à la fin de chaque année pendant n années pour un taux d'actualisation i.

Il cherche le taux i, appelé taux de rentabilité interne du projet, tel que la valeur actuelle des flux de trésorerie soit égale à l'investissement initial.

1. Montrer que ce problème revient à résoudre l'équation $4000(1-(1+i)^{-4}) = 12\ 000i$.
2. À l'aide de la partie **A**, donner, en l'exprimant sous forme de pourcentage, une valeur arrondie à 1 % de i.

Annexe



Exercice n° 31* (spécialité « 2 heures »).

Le prix d'achat d'une machine est de 12 150 €.

Son coût d'entretien et de maintenance s'élève chaque année à $500 + 1\ 200n$ €, où n est le rang de l'année. On suppose que la machine peut être rachetée à l'identique (même prix d'achat) et qu'il n'y a pas de marché de l'occasion (sa valeur est supposée nulle en cas de renouvellement).

On suppose que l'entretien et la maintenance assurent son bon fonctionnement. Le coût total de la machine est égal à son prix d'achat augmenté de la somme de tous les coûts d'entretien ; son coût moyen est le coût total divisé par la durée de son utilisation.

En supposant que la durée d'utilisation optimale est celle qui correspond au minimum du coût moyen, l'objectif de l'exercice est de déterminer la durée optimale d'utilisation de la machine pour un fonctionnement maximum de huit ans.

1. Les prévisions des coûts ont été calculées à l'aide d'un tableur. Un extrait de la feuille de calcul est reproduit dans le tableau ci-dessous.

Années	1	2	3	4	5	6	7	8
Coût annuel de l'entretien et de la maintenance	1 700 €	2 900 €	4 100 €	5 300 €	6 500 €	7 700 €	8 900 €	10 100 €
Coût total cumulé de l'entretien et de la maintenance	1 700 €	4 600 €	8 700 €	14 000 €	20 500 €	28 200 €	37 100 €	47 200 €
Coût total achat compris	13 850 €	16 750 €	20 850 €	26 150 €	32 650 €	40 350 €	49 250 €	59 350 €
Coût moyen	13 850 €	8 375 €	6 950 €	6 538 €	6 530 €	6 725 €	7 036 €	7 419 €

(La deuxième année le coût annuel de l'entretien et de la maintenance est 500 € + 1 200 € ×2, soit 2 900 €, le coût total cumulé de l'entretien et de la maintenance est alors 1 700 € + 2 900 €, soit 4 600 €, le coût total, achat compris, 4 600 € + 12 150 €, soit 16 750 € et le coût moyen sur les deux années d'utilisation 16 750 € : 2, soit 8 375 €).

Quelle conjecture peut-on faire sur la durée optimale d'utilisation de la machine pour un fonctionnement maximum de huit ans ?

2. On note (u_n) la suite des coûts annuels, en euros, d'entretien et de maintenance. Ainsi, $u_1 = 1\ 700$ et $u_2 = 2\ 900$.

   Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique.

   En déduire que $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n(1\ 100 + 600n)$.
3. On note $C_m(n)$ le coût moyen de la machine l'année n.

   Démontrer que $C_m(n) = 1\ 100 + 600n + \dfrac{12\ 150}{n}\cdot$
4. On considère la fonction $C_m\ :\ x \mapsto 1\ 100 + 600x + \dfrac{12\ 150}{x}$ sur l'intervalle $[1, 8]$. C_m modélise l'évolution du coût moyen de la machine sur l'intervalle $[1, 8]$.
   (a) Sur une calculatrice, faire apparaître la courbe représentative de la fonction C_m dans la fenêtre $1 \leqslant x \leqslant 8, \quad 6\ 000 \leqslant y \leqslant 14\ 000$. Reproduire l'allure de la courbe sur la copie.
   (b) D'après cette représentation graphique, donner le tableau de variations de la fonction C_m.
   (c) À l'aide de la calculatrice, donner, à 10^{-2} près, une valeur décimale approchée du nombre réel qui minimise $C_m(x)$ et une valeur entière approchée du minimum correspondant.
   (d) En déduire une durée optimale d'utilisation de la machine pour un fonctionnement d'au maximum huit ans.

Exercice n° 32* (spécialité « 3 heures »).

Le prix d'achat d'une machine est de 13 000 €.

Son coût d'entretien et de maintenance est de 1 250 € la première année et augmente ensuite de 25 % chaque année. On suppose que la machine peut être rachetée à l'identique (même prix d'achat) et qu'il n'y a pas de marché de l'occasion (sa valeur est supposée nulle en cas de renouvellement).

On suppose que l'entretien et la maintenance assurent son bon fonctionnement. Le coût total de la machine est égal à son prix d'achat augmenté de la somme de tous les coûts d'entretien ; son coût moyen est le coût total divisé par la durée de son utilisation.

En supposant que la durée d'utilisation optimale est celle qui correspond au minimum du coût moyen, l'objectif de l'exercice est de déterminer la durée optimale d'utilisation de la machine pour un fonctionnement maximum de huit ans.

1. Les prévisions des coûts ont été calculées à l'aide d'un tableur. Un extrait de la feuille de calcul est reproduit dans le tableau ci-dessous.

Années	1	2	3	4	5	6	7	8
Coût annuel de l'entretien et de la maintenance	1 250,0 €	1 562,5 €	1 953,1 €	2 441,4 €	3 051,8 €	3 814,7 €	4 768,4 €	5 960,5 €
Coût total cumulé de l'entretien et de la maintenance	1 250,0 €	2 812,5 €	4 765,6 €	7 207,0 €	10 258,8 €	14 073,5 €	18 841,9 €	24 802,3 €
Coût total achat compris	14 250,0 €	15 812,5 €	17 765,6 €	20 207,0 €	23 258,8 €	27 073,5 €	31 841,9 €	37 802,3 €
Coût moyen	14 250,0 €	7 906,3 €	5 921,9 €	5 051,8 €	4 651,8 €	4 512,2 €	4 548,8 €	4 725,3 €

(La deuxième année le coût de l'entretien et de la maintenance est 1 562,5 €, le coût total cumulé de l'entretien et de la maintenance est alors 1 250 € + 1 562,5 €, soit 2 812,5 €, le coût total, achat compris, 2 812,5 € + 13 000 €, soit 15 812,5 € et le coût moyen sur les deux années d'utilisation 15 812,5 € : 2, soit environ 7 906,3 €).

Quelle conjecture peut-on faire sur la durée optimale d'utilisation de la machine pour un fonctionnement maximum de huit ans ?

2. On note (u_n) la suite des coûts annuels, en euros, d'entretien et de maintenance. Ainsi, $u_1 = 1\,250$ et $u_2 = 1\,562{,}5$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique. Exprimer u_n en fonction de n.
   En déduire que $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 5\,000 \times (1{,}25^n - 1)$.
3. On note $C_m(n)$ le coût moyen de la machine l'année n.
   Démontrer que $C_m(n) = \dfrac{8\,000}{n} + \dfrac{5\,000 \times 1{,}25^n}{n}$.
4. On considère la fonction $C_m \;:\; x \mapsto \dfrac{8\,000}{x} + \dfrac{5\,000 \times 1{,}25^x}{x}$ sur l'intervalle $[1,\,8]$. C_m modélise l'évolution du coût moyen de la machine sur l'intervalle $[1,\,8]$.
   (a) Sur une calculatrice, faire apparaître la courbe représentative de la fonction C_m dans la fenêtre $1 \leqslant x \leqslant 8$, $4\,000 \leqslant y \leqslant 15\,000$. Reproduire l'allure de la courbe sur la copie.
   (b) D'après cette représentation graphique, donner le tableau de variations de la fonction C_m.
   (c) À l'aide de la calculatrice, donner, à 10^{-2} près, une valeur décimale approchée du nombre réel qui minimise $C_m(x)$ et une valeur entière approchée du minimum correspondant.
   (d) En déduire une durée optimale d'utilisation de la machine pour un fonctionnement d'au maximum huit ans.