Résolution de l'équation du troisième degré $x^3 + ax = b$ où a et b sont des réels positifs

Énoncé

Viète (François Viète, mathématicien français, 1540-1603) résolut l'équation du troisième degré de la forme $x^3 + ax = b$ où a et b sont des réels positifs.

1° Quel est le signe des solutions cherchées ?

2° Montrez qu'en posant $x = \dfrac{a}{3X} - X$, on obtient : $X^6 + b\,X^3 - \dfrac{a^3}{27} = 0$

3° Posons $Y = X^3$. Montrez qu'on obtient une équation du second degré en Y : $Y^2 + b\,Y - \dfrac{a^3}{27} = 0$.

4° Calculez le discriminant Δ de cette équation et précisez son signe. Que va-t-on calculer successivement pour trouver les solutions de l'équation proposée ?

5° Appliquez la procédure à l'équation $x^3 + 2x = 8$. Le résultat vous surprendra.

6° Montrez que le phénomène que vous venez d'observer n'est pas dû aux choix des coefficients de l'exemple étudié, mais qu'il se produit quels que soient a>0, b>0.

Réponse

1° Remarquons d'abord que l'équation n'admet pas de racines négatives, puisque $x < 0, a > 0, b > 0$ conduirait à une contradiction.

2° Il suffit de substituer et de développer.

3° Ce passage est immédiat.

4° $\Delta = \dfrac{27\,b^2 + 4\,a^3}{27}$; Δ est positif, puisque a^3 et b^2 sont positifs.
On calcule alors Y_1, Y_2, puis X_1, X_2 et finalement $x_1 = \dfrac{a}{3X_1} - X_1, x_2 = \dfrac{a}{3X_2} - X_2$.

5° Appliquons la procédure à l'équation $x^3 + 2x = 8$:
- on trouve $\Delta = \dfrac{27 \cdot 64 + 4 \cdot 8}{27} = \dfrac{1760}{27}$
- on en déduit $Y_1 = -4 + 2 \cdot \sqrt{\dfrac{110}{27}}$, $Y_2 = -4 - 2 \cdot \sqrt{\dfrac{110}{27}}$
- alors $X_1 = \sqrt[3]{-4 + 2 \cdot \sqrt{\dfrac{110}{27}}} \simeq 0.332822857$, $X_2 = \sqrt[3]{-4 - 2 \cdot \sqrt{\dfrac{110}{27}}} \simeq -2.003067554$
- finalement : $x_1 \simeq 1.670244697$, $x_2 \simeq 1.670244697$. Surprise : c'est deux fois le même résultat !

6° On se pose la question si les deux solutions trouvées pour X conduisent *toujours* à la même valeur de x, quels que soient $a > 0, b > 0$ dans l'équation proposée.
Pour cela, considérons le produit des racines de $Y^2 + b\,Y - \dfrac{a^3}{27} = 0$: il vaut $Y_1 \cdot Y_2 = -\dfrac{a^3}{27}$.
Comme $(X_1 \cdot X_2)^3 = Y_1 \cdot Y_2$, on conclut que $X_1 \cdot X_2 = -\dfrac{a}{3}$, donc que $X_2 = -\dfrac{a}{3\,X_1}$.
Donc : $x_2 = \dfrac{a}{3\,X_2} - X_2 = \dfrac{a}{3\left(-\dfrac{a}{3\,X_1}\right)} - \left(-\dfrac{a}{3\,X_1}\right) = -X_1 + \dfrac{a}{3\,X_1} = x_1$.
On trouve effectivement le même résultat, qu'on substitue X_1 ou X_2 (qui sont d'ailleurs de signes contraires, vu que leur produit $-\dfrac{a}{3}$ est négatif).